

XVIII^e Festival d'astronomie de Fleurance

FIL NOIR ASTROMATH



La gravitation, une propriété de l'espace ?

Jérôme Perez

Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA
Laboratoire Univers & Théories de l'observatoire de Meudon

Aout 2008

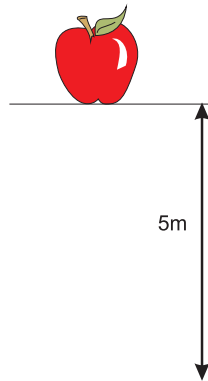
1 Tout est dans la chute ...

1.1 Chute d'une pomme

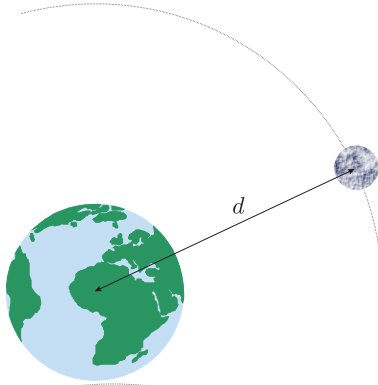
Temps de chute ?

1 seconde

Faite l'expérience vous-même !



1.2 Chute de la Lune



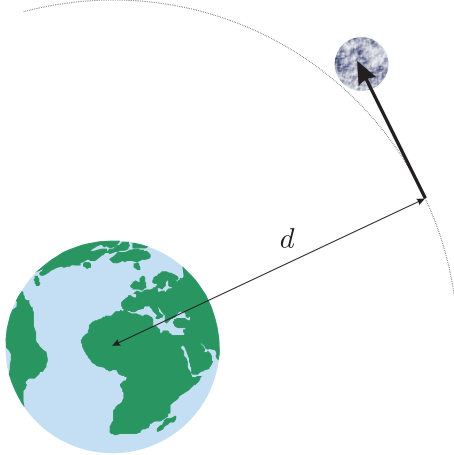
$$T \approx 27,371 \text{ jours}$$

$$C \approx 2\pi \times 384\,000 \text{ km}$$

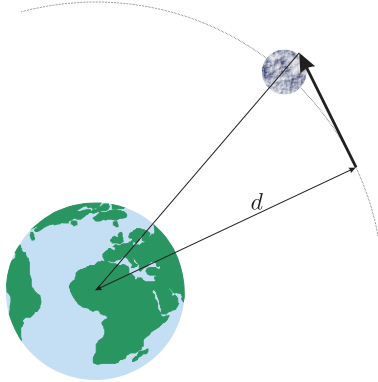
Soit

$$T \approx 2\,364\,854 \text{ s}$$

$$C \approx 2\,412\,672 \text{ km}$$



Vitesse $\approx 1 \text{ km/s}$
 Si la Lune n'était pas attirée par la Terre elle irait tout droit !
 En fait elle tombe un peu ...
 d'une hauteur h



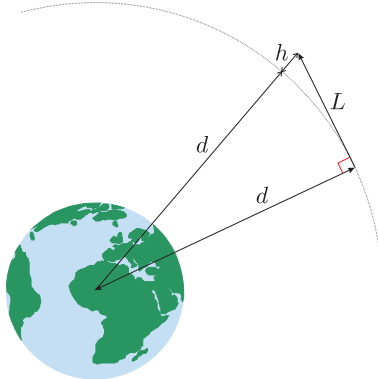
Théorème de Pythagore

$$d^2 + L^2 = (d + h)^2$$

$$\text{Soit } h \approx L^2/2d$$

$$\text{pour 1 seconde, } L = 1 \text{ km}$$

$$\Rightarrow h = 1,35 \text{ mm}$$



Bilan 1

En une seconde ...

🍏 La pomme tombe de 5 m,
elle est située à 6380 km du centre de la Terre ...

🍎 La Lune tombe de 1,35 mm,
elle est située à 380 000 km, du centre de la Terre ...

$$\boxed{\frac{D_{\text{Lune}}}{D_{\text{Pomme}}} = \frac{380\,000}{6\,380} \approx 60} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{h_{\text{Lune}}}{h_{\text{Pomme}}} = \frac{5}{0,00135} \approx 60 \times 60}$$

La Lune est 60 fois plus loin que la pomme, elle est 60×60 fois moins attirée !
La gravitation est inversement proportionnelle au carré de la distance

1) Force de gravitation : attractive

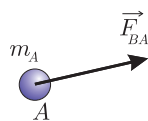
$$\vec{F}_{BA} \propto - \frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|^3}$$

= - - - - -

2) Force de gravitation : dépend de
 m_A et m_B

$$\vec{F}_{BA} \propto -m_A m_B \frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|^3}$$

= - - - - -



3) Force de gravitation : est une force !

$$\left. \begin{matrix} \vec{F}_{BA} \\ [\text{M}] \cdot [\text{L}] \cdot [\text{T}]^{-2} \end{matrix} \right\} \propto \left\{ \begin{matrix} -m_A m_B \vec{BA} / \|\vec{BA}\|^3 \\ [\text{M}]^2 \cdot [\text{L}]^{-2} \end{matrix} \right.$$

Constante de Newton

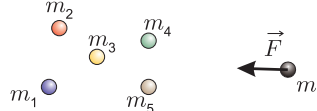
$$G = 6.64 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

= - - - - -

Finalement la force de gravitation
s'écrit

$$\vec{F}_{BA} = -G m_A m_B \frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|^3}$$

2 Potentiel de gravitation



$$\vec{F} = -Gm \sum_{i=1}^5 m_i \frac{\overrightarrow{M_i M}}{\|\overrightarrow{M_i M}\|^3}$$

Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on note $(x, y, z)^T$ les coordonnées de M et $(x_i, y_i, z_i)^T$ les coordonnées de M_i , on a donc

$$\|\overrightarrow{M_i M}\|^{-1} = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{-1/2}$$

on peut calculer

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\|\overrightarrow{M_i M}\|^{-1} \right) &= \left(-\frac{1}{2} \right) 2(x - x_i) [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{-3/2} \\ &= (x - x_i) / \|\overrightarrow{M_i M}\|^3 \\ &= \frac{\overrightarrow{M_i M} \cdot \vec{e}_x}{\|\overrightarrow{M_i M}\|^3} \end{aligned}$$

Pour tout champ scalaire f de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{\text{grad}} [f(x, y, z)] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)^T \text{ et donc } \overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{1}{\|\overrightarrow{M_i M}\|} \right] = -\frac{\overrightarrow{M_i M}}{\|\overrightarrow{M_i M}\|^3}$$

on remarque donc que

$$\vec{F} = -m \overrightarrow{\text{grad}} \psi \quad \text{avec} \quad \psi(M) = \sum_{i=1}^5 -\frac{Gm_i}{\|\overrightarrow{M_i M}\|}$$

à la limite continue

$$\psi(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^3 \vec{r}'$$

$\rho(\vec{r})$ est la densité volumique de masse au point $\vec{r}$, elle est la source du potentiel gravitationnel $\psi(\vec{r})$.

Bilan 2

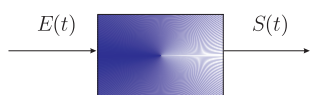
La force de gravitation $\vec{F}$ ressentie par une masse m située en un point de l'espace repéré par $\vec{r}$ dérive du potentiel de gravitation $\psi(\vec{r})$.

$$\vec{F} = -m \overrightarrow{\text{grad} \psi(\vec{r})}$$

Le potentiel de gravitation est créé par une densité volumique de masse $\rho(\vec{r})$

$$\psi(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d^3 \vec{r}'$$

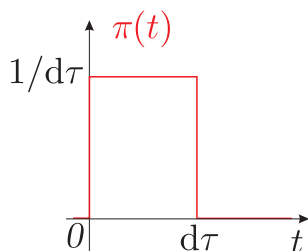
3 Théorie de la réponse linéaire



Considérons un système avec une entrée $E(t)$ et une sortie $S(t)$

3.1 Réponse à un créneau

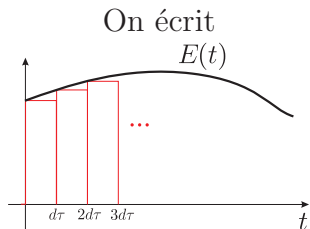
Entrée : créneau unité



$$\text{Aire sous le créneau : } \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t) dt = 1$$

On enregistre la "réponse" $S_\pi(t) := H_{d\tau}(t)$ du système lorsque $E(t) = \pi(t)$.

3.2 Réponse à une entrée quelconque $E(t)$



On écrit

$$E(t) = \dots + E(0) \pi(t) d\tau + E(\tau) \pi(t - d\tau) d\tau + \dots$$

$$\qquad \qquad \qquad = 1 \qquad \qquad \qquad = 1$$

$$E(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(kd\tau) \pi(t - kd\tau) d\tau$$

Hypothèses sur le système

- 🍎 Le système est linéaire : Pour $i = 1, 2, \dots$ on note $S_{\lambda_i}(t)$ la sortie lorsque $E(t) = \lambda_i(t)$, la linéarité signifie que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, S_{a\lambda_1 + b\lambda_2}(t) = aS_{\lambda_1}(t) + bS_{\lambda_2}(t)$$

- 🌿 La réponse du système ne dépend pas de l'instant où l'entrée a été envoyée, c'est-à-dire

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, S_{\lambda(t-\tau)}(t) = S_{\lambda(t)}(t - \tau)$$

Sous ces hypothèses générales $S_E(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(kd\tau) H_{d\tau}(t - kd\tau) d\tau$

3.3 Passage à la limite continue ...

Si $d\tau \rightarrow 0$, le créneau unité $\pi(t)$ tend vers la distribution de Dirac $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \forall \varphi(t) \in \mathbb{S}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0)$$

$\delta(t)$: impulsion fondamentale, on note $H(t) = H_\delta(t) = \lim_{d\tau \rightarrow 0} H_{d\tau}(t)$.

La réponse à une entrée quelconque s'écrira

$$S_E(t) = \lim_{d\tau \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(kd\tau) H_{d\tau}(t - kd\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x) H(t - x) dx$$

qui définit le produit de convolution

$$S_E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x) H(t - x) dx := (E * H)(t) = (H * E)(t)$$

par définition de la réponse impulsionnelle on a donc

$$H(t) = (H * \delta)(t) = (\delta * H)(t)$$

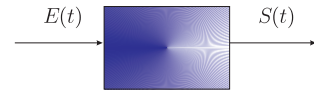
qui se généralise facilement pour toute "fonction" $\varphi \in \mathbb{S}$

$$\varphi = \varphi * \delta = \delta * \varphi$$

on dit que δ est l'élément neutre de l'algèbre de convolution.

Bilan 3

Pour un système linéaire, avec
une entrée $E(t)$ et une sortie $S(t)$



$$S = H * E$$

avec



4 Le laplacien dans $\mathbb{R}^3$

Considérons une fonction f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, si cette fonction est 2 fois dérivable par rapport à toutes ses variables, on peut définir son *laplacien*. En coordonnées cartésiennes (O, x, y, z) , il s'écrit

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Notons $f(O) = f_o$ et considérons un cube élémentaire $\mathcal{C}$ de côté a , dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées et dont le centre se confond avec l'origine O .

La valeur moyenne de f dans ce cube élémentaire, autrement dit la valeur moyenne de f au voisinage du point O , est fournie par l'expression

$$\bar{f} = \frac{1}{a^3} \int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) \, dx dy dz$$

Le cube $\mathcal{C}$ est le produit cartésien de chacun des segments constituant ses arêtes

$$\mathcal{C} = \left[\frac{-a}{2}, \frac{a}{2} \right] \times \left[\frac{-a}{2}, \frac{a}{2} \right] \times \left[\frac{-a}{2}, \frac{a}{2} \right]$$

4.1 Laplacien, moyennes et fluctuations

Considérons le développement en série de Taylor de f au voisinage de O

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f_o + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_o x + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_o y + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_o z \\ &+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_o x^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_o y^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)_o z^2 \right] \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_o xy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right)_o xz + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right)_o yz + o(2) \end{aligned}$$

Prenons la valeur moyenne de cette expression sur $\mathcal{C}$. On remarque que

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_o x} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_o \bar{x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_o \frac{1}{a^3} \int_{\mathcal{C}} x \, dx dy dz \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_o \frac{1}{a^3} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x \, dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_o \frac{1}{a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_o \frac{1}{a} \left[\frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{8} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = 0 \end{aligned}$$

alors que

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o x^2} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o \overline{x^2} = \frac{1}{a^3} \int_C x^2 dx dy dz \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o \frac{1}{a} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o \frac{a^2}{12}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\bar{f} = f_o + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_o + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_o + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_o \right] \frac{a^2}{12} + o(2)$$

soit

$$\bar{f} = f_o + \frac{a^2}{24} (\Delta f)_o + o(2)$$

ce résultat est valable pour un choix quelconque de l'origine O , ainsi à l'ordre 2 et en tout point M on a

$$(\Delta f)_M = \frac{24}{a^2} (\bar{f} - f(M)) \propto (\bar{f} - f(M))$$

Le laplacien de f quantifie dans un voisinage de chaque point l'écart entre sa valeur en ce point et sa valeur moyenne.

4.2 Réponse impulsionnelle du laplacien

Si nous considérons que l'entrée est une fluctuation locale $v \propto u - \bar{u}$, la réponse spatiale globale sera donc l'argument du laplacien u .

$$\Delta u = v \leftarrow \text{entrée}$$

Supposons connue une solution g du problème $\Delta g = \delta$, ce qui signifie que pour toute fonction $\varphi \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi \Delta g = \int_{\mathbb{R}^3} g \Delta \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} \delta \varphi = \varphi(0)$$

Théorème : la fonction u telle que $\Delta u = v$ vérifie $u = g * v$.

Preuve : il suffit de remarquer que si l'on peut définir un laplacien pour les fonctions a , b et $a * b$ de $\mathbb{S}(\mathbb{R}^3)$ alors

$$\Delta(a * b) = \Delta a * b = a * \Delta b$$

Il suffit de faire deux intégrations par partie, pour vérifier cette affirmation. Ainsi lorsque $u = g * v$ on a $\Delta u = \Delta g * v = \delta * v = v$ car δ est l'élément neutre de l'algèbre de convolution ... et donc $\Delta u = v$ ■

4.3 Le dernier théorème ...

La fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ g_r : \quad \vec{r} = (x, y, z)^T & \mapsto -\frac{1}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{4\pi\|\vec{r}\|} \end{aligned}$$

est la réponse impulsionnelle radiale du laplacien de $\mathbb{R}^3$.

Preuve : il suffit de vérifier que $\Delta g_r = \delta$ c'est-à-dire, pour toute fonction radiale φ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}^3} g_r \Delta \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} \delta \varphi = \varphi(0)$$

ce que nous faisons en écrivant Δ en coordonnées sphériques (r, θ, ψ) et pour une fonction radiale $\varphi = \varphi(\|\vec{r}\|) = \varphi(r)$

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} g_r \Delta \varphi &= \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{+\infty} r^2 dr \left(-\frac{1}{4\pi r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) \\ &= - \int_0^{+\infty} dr \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) \\ &= - \left[r \frac{d\varphi}{dr} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{d\varphi}{dr} dr \\ &= \varphi(0) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Finalement, nous pouvons affirmer que la réponse globale u à une fluctuation spatiale v s'écrit donc

$$u = g_r * v$$

5 Conclusion finale

Nous avons vu que le potentiel gravitationnel $\psi(\vec{r})$ s'exprime en fonction de la densité massique $\rho(\vec{r})$ par la relation

$$\psi(\vec{r}) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\vec{r}'$$

soit

$$\psi = 4\pi G g_r * \rho$$

dont la signification devient lumineuse : la gravitation, issue du potentiel gravitationnel, est la réponse globale à une fluctuation locale de masse introduite via la densité volumique de masse.

La gravitation est donc une propriété de l'espace qui se manifeste lors de fluctuations locales de la densité volumique de masse.

Ce qu'il fallait démontrer !