

Approches de la Réfraction Astronomique et ses propriétés

Une histoire méconnue entre Optique,
Mathématiques et Géodésie



Luc DETTWILLER
Docteur en Optique
Professeur de Physique

*Math Spé PC**
Lycée Blaise PASCAL
CLERMONT-FERRAND

Observateur Associé

Coronographes
HACO / CLIMSO
du Pic du Midi

« To make a new table of refractions has taken up almost all my time ever since the holidays : and I have hitherto lost my pains in fruitless calculations, by reason of the difficulty of the work. For considering that such a table is the foundation of astronomy [...] »

Isaac NEWTON, *Lettre au Royal Astronome FLAMSTEED* (26 / 01 / 1695)

« There is, perhaps, no branch of practical astronomy on which so much has been written as on this and which is still in so unsatisfactory a state. »

Simon NEWCOMB, *A Compendium of Spherical Astronomy*, Macmillan (New York, 1906)



Labellisation



2015
ANNÉE DE LA LUMIÈRE
EN
FRANCE

Luc DETTWILLER
Docteur en Optique
Professeur de Physique

*Math Spé PC**
Lycée Blaise PASCAL
CLERMONT-FERRAND

Observateur Associé

Coronographes
HACO / CLIMSO
du Pic du Midi



Introduction

I - Les fondateurs

II - Les géodésiens
expérimentateurs

III - Les classiques

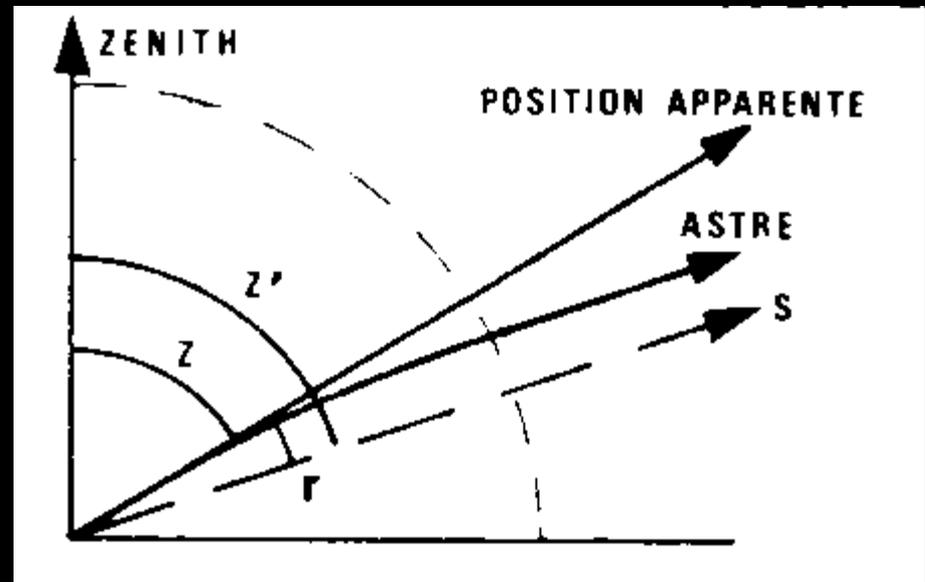
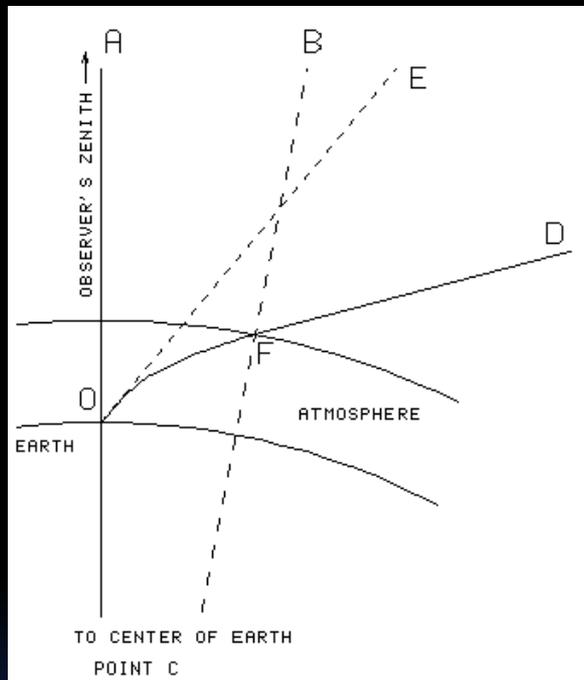
IV - Les géodésiens
métrologistes

V - Les continuateurs
et les ouvriers

Conclusion

INTRODUCTION

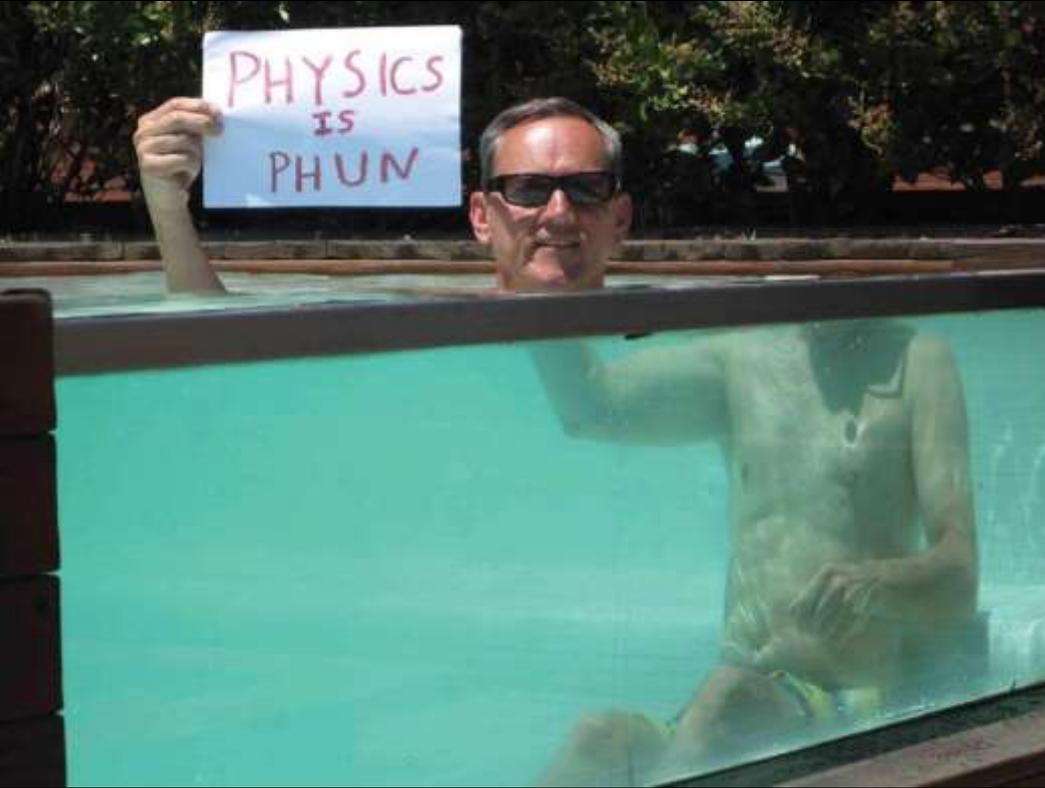
1 – De quoi s'agit-il ?



À cause de la courbure du rayon vers le sol (due à l'augmentation de l'indice de réfraction n de l'air vers le sol), **la hauteur apparente ψ' des astres est augmentée de l'angle \mathcal{R} (angle de réfraction astronomique).**

La **distance zénithale apparente** est $Z' = Z - \mathcal{R}$ (notations interverties sur la figure).

Et cela déforme l'image du Soleil !



« La première fois qu'un enfant voit un bâton à moitié plongé dans l'eau, il voit un bâton brisé : la sensation est vraie, et elle ne laisserait pas de l'être, quand même nous ne saurions point la raison de cette apparence. Si donc vous lui demandez ce qu'il voit, il dit : un bâton brisé, et il dit vrai, car il est très sûr qu'il a la sensation d'un bâton brisé. Mais quand, trompé par son jugement, il va plus loin, et qu'après avoir affirmé qu'il voit un bâton brisé, il affirme encore que ce qu'il voit **est** en effet un bâton brisé, alors il dit **faux**. »

ROUSSEAU, *Émile ou de l'éducation*, 1762, Livre III, [La Pléiade, p. 482]

C'est phénoménal ! Où est la faute ?

« [...] dans cet exemple même, c'est l'entendement seul qui corrige l'erreur du sens, et il est impossible d'en apporter jamais aucun, dans lequel l'erreur vienne pour s'être plus fié à l'opération de l'esprit qu'à la perception des sens. »

DESCARTES, *Sixièmes Réponses aux Objections adressées aux Méditations métaphysiques*, IX (1647)

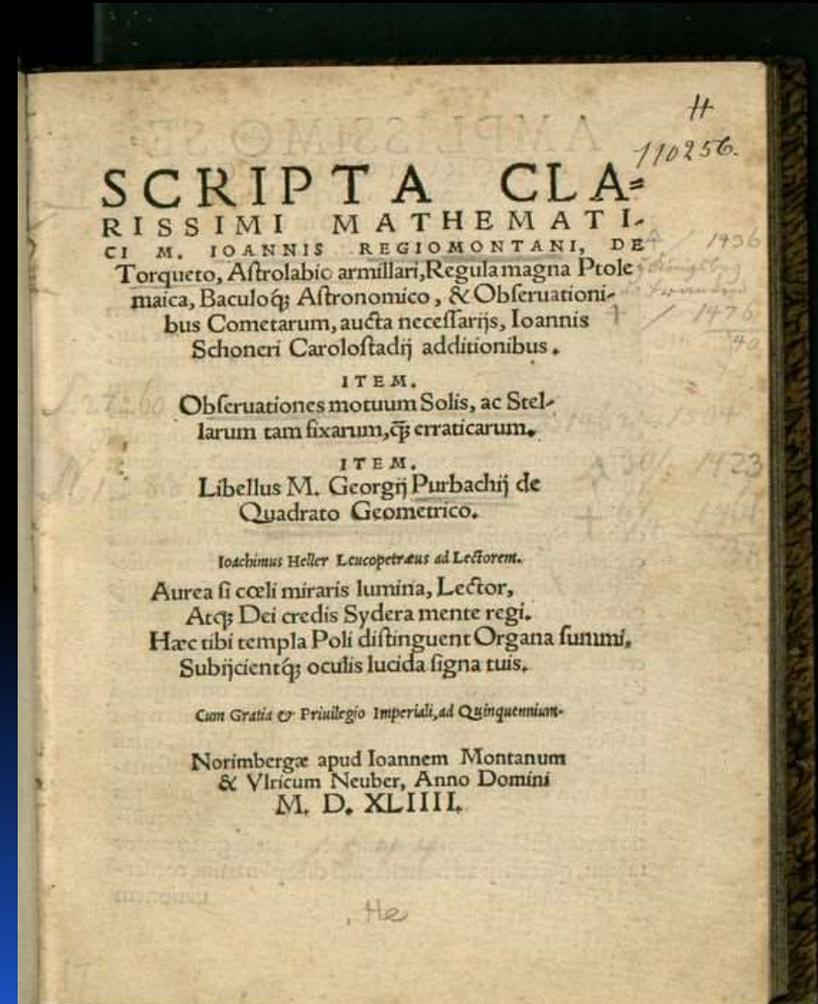
2 – Première preuve instrumentale publiée

Dans J. SCHÖNER éd., *Scripta Clarissimi Mathematici M. Ioannis Regiomontani*, Apud Ioannem Montanum et Vlricum Neuberg (Norimbergæ, 1544)



Sphère armillaire –
pour l'observation des
mouvements apparents
des astres.

Johannes SCHÖNER
(1477-1547) – selon la
Deutsche Bundesbank en 1964...



Observation du 7 / 03 / 1489 (plus d'un siècle avant la découverte de l'effet *Novaya Zemlya* en 1597) par le patricien Bernhard WALTHER (qui avait financé le premier observatoire d'Europe, à Nuremberg) : les étoiles et le Soleil vus peu au-dessus de l'horizon doivent en réalité être en-dessous, d'après la sphère armillaire.

Anno 1489.

Die 5 Martij ante occasum Solis, uidelicet dum mediū cœli 22 gradum π , possiderat et Sol per aspectum armillarum et regularum in 24 grad. et 15 mi. κ , & per alium circulum in 26 gradibus 8 mi. ν inuenti fuerāt, Canis Alhabor post occasum per mediā horam aut ultra 7 grad. 30 mi. \odot . Cor Ω 23 gradus 0 mi. Ω habuere, non fundes te nimis in hanc obseruationem.

Die 6 Martij circa occasum Solis, dū uidelicet in medio cœli esset 25 π , Sol per Armillas in 25 grad. 15 mi. κ . Venus per alium circulum, ecliptica Solem diuidente in 27 grad. 15 mi. ν inuenta est, sed circulo latitudinis Solem mediante (uti Solet circa horizontem) in alio loco, puta in 25 gradu, 30 min. ν reperta est, cuius causam postea subiungam.

Eadem die post occasum Solis Armilla rectificata mediante Venere in eo loco posita, quæ per eclipticam inuētus est, reperi dum Mediū cœli 12 gradus \odot foret. Cor Ω in 23 grad. 0 mi. Ω , Alhabor, ut credo, 7 gradus \odot .

Die 7 Martij Sol per aspectum Armillarum 26 gra. 15 mi. κ Venus ex ecliptica 28 gra. 15 mi. ν ex circulo latitudinis 27 gra. 38 mi. ν . Item ne diutius lecturos lateat quomodo procefferim qd locus ν quasi in eodē instanti adeo difformiter reperi tus sit. Est notandum quod circa horizontem astra apparent propter radios fractos super horizontē, cum secundū ueritatem sint sub eo, quod instrumento armillarum sensibiliter sepius mihi apparuit anteq̃ perspectiuas Alhacen & Vitelionis Turin gi uiderim, in quibus postea hoc declaratū ad unguē reperi, sed ad fugiendū Lunæ aspectus diuersitatem, etiam modum Ptole mei capitulo secundo dictionis septimæ examinari, et distantia Solis et Veneris circa meridiem, aut postea instrumento armillarum deprehendi, prius accepto loco Solis per regulas aut armillas, aut per utrumq̃ instrumentū. Cum uero in occasu Solis loca amborum, uidelicet Solis et Veneris examinare uisus fueram, uertendo eclipticam armillarum et locum Solis in eodem uersus ipsum quoad interiori superficie i utraque pars uidelicet inferior

inferior & superior à sole equaliter illuminabant, mouēdo etiā circulū latitudinis, quoscq̃ etiā ambeq̃ ptes superficie interioris eiusdem uidelicet dextra ac sinistra equalē à sole illuminationē acceperāt, quare si radij solares irrefracte ad uisum uenissent, circulus latitudinis locū solis utiq̃ ostendisset. Sed differētiam notabilem reperi, & hanc qdem differenter: Maiorē quidem dum declinatio solis modicū creuerat aut decreuerat. Minorē ν cum notabiliter mutabat, ut in solsticijs maximā, in egnocētis ν 0 min. Cum ergo in occasu solis ambos circulos à Sole (ut prædictū est) illuminatos uidi, nequaquā Solis, neq̃ ex eo Veneris locū uerū habui. Si aut circulo latitudinis sup loco Solis posito per obseruationē meridianā reperto, atq̃ p additionē motus eius intermedij reperto. In occasu Solis eundē circulum uersus Solem exhibui, quoad modo prædicto eius superficie interior illuminata, ueritati p̃p̃inuius accessi, neq̃ illa uia sufficiebat ob quam rem ex foramine apud oculū pinnulæ appendi p̃pendiculū speci ali ingenio cōsiderando q̃ punctū cuius forma refrangit centrū uisus, punctus à quo fit refractio & p̃pendicularis à puncto refractionis, in una sunt superficie, & uidebam dum intersectio eclipticæ ac circuli latitudinis ad cōtactū horizontis uenerat, q̃ Sol per foramen alterius pinnulæ filum p̃p̃ediculi adhuc illuminauit, ita q̃ prænarrata in una erāt superficie, scilicet centrū Solis, idem punctus cuius forma refrangit, centrū uisus punctus refractionis & p̃p̃edicularis similiter & locus Solis in ecliptica, quare in omnibus obseruationibus præcedentibus & sequētibus ad stellas fixas habitis, illis maior fides adhibēda est, in quibus p̃pendiculo (uti præactum est) usus sum.

12. Martij in occasu Solis habuit ν 4. gra. 18. m. ν . Alhabor 7. gra. 0 m. \odot . Cor Ω 23. Ω latitudo Alhabor 39 $\frac{1}{2}$. gr. meridionalis.

13. Martij post occasum Solis habuit Alhabor 6. gra. 45. m. \odot . latitudo 39. gr. 40. m. Cor Ω 22. gr. 38. m. Ω . ν 5. gr. 15. m. ν

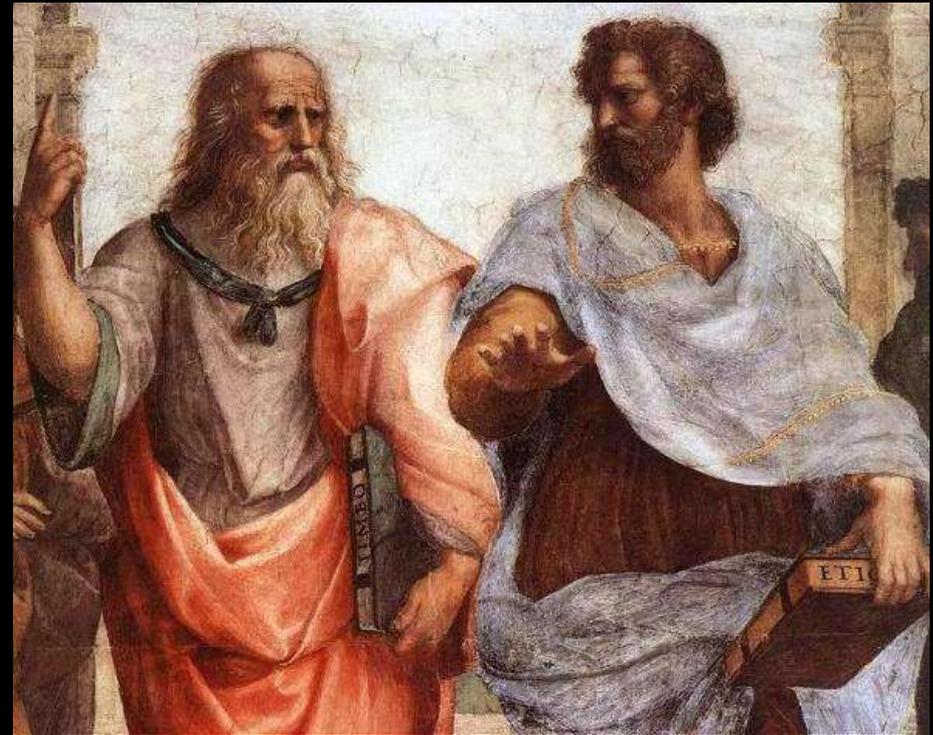
14. Martij habuit ν in occasu Solis 6. gra. 13. m. ν

15. Martij media hora post meridiem habuit ν 7. gra. 23. m.

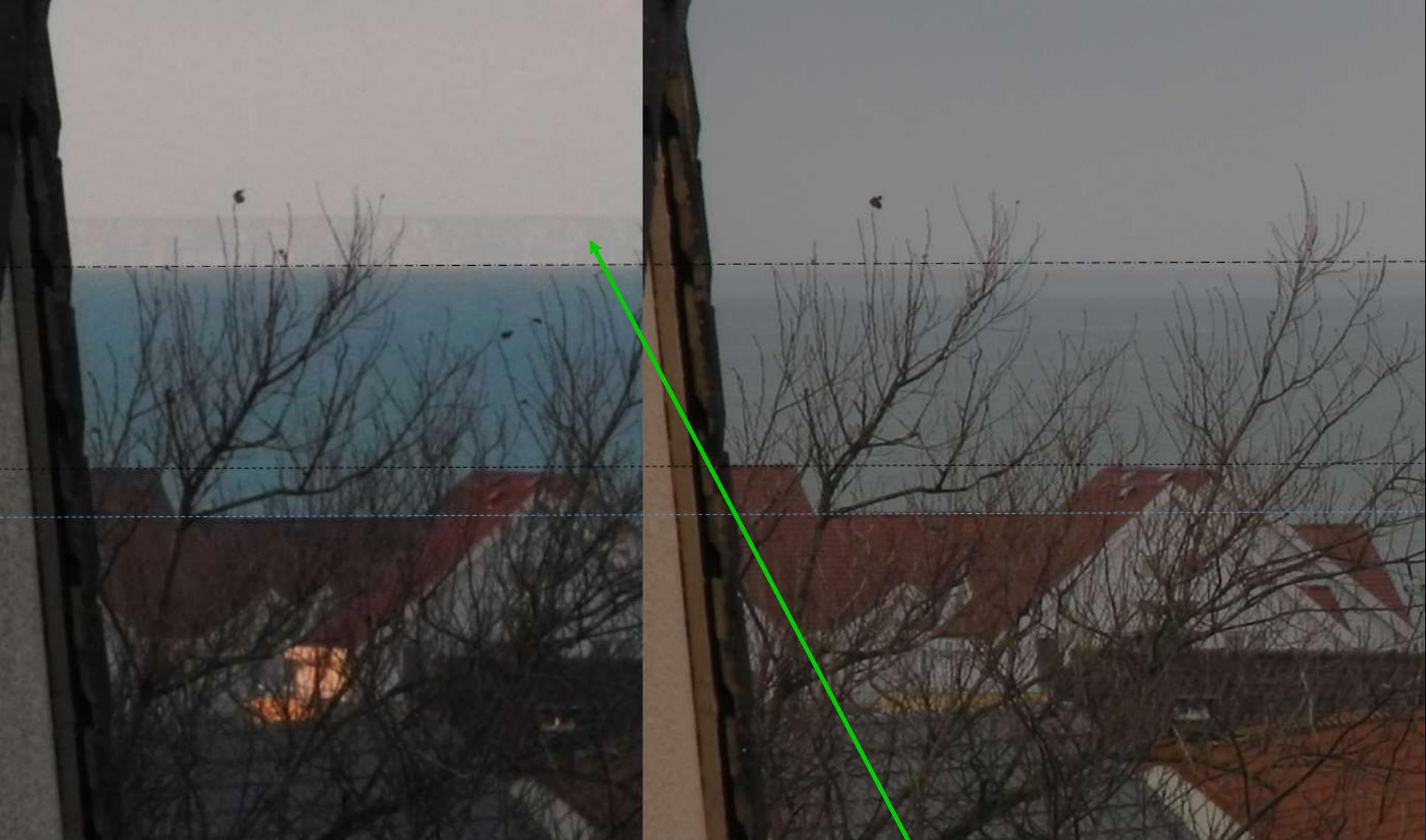
3 – Précurseurs

ARISTOTE, *Météorologiques*, semble être le premier document mentionnant un effet de réfraction atmosphérique : le surgissement et l'étirement vertical à l'horizon.

PLATON (424-348 av. J.-C.)
et ARISTOTE (384-322 av. J.-C.)
d'après RAPHAËL (détail de *L'École
d'Athènes*, 1510)



HIPPARQUE de Nicée (II^e siècle av. J.-C.) – dont les traités sont presque tous perdus – aurait, d'après PLINE l'Ancien et PTOLÉMÉE, été le premier à déduire à l'œil nu l'existence de la réfraction astronomique : car il a aurait observé une éclipse de Lune rare, où on voyait le Soleil sur l'horizon en même temps que la Lune éclipsee !



Surgissement et
baisse de la dépression de l'horizon

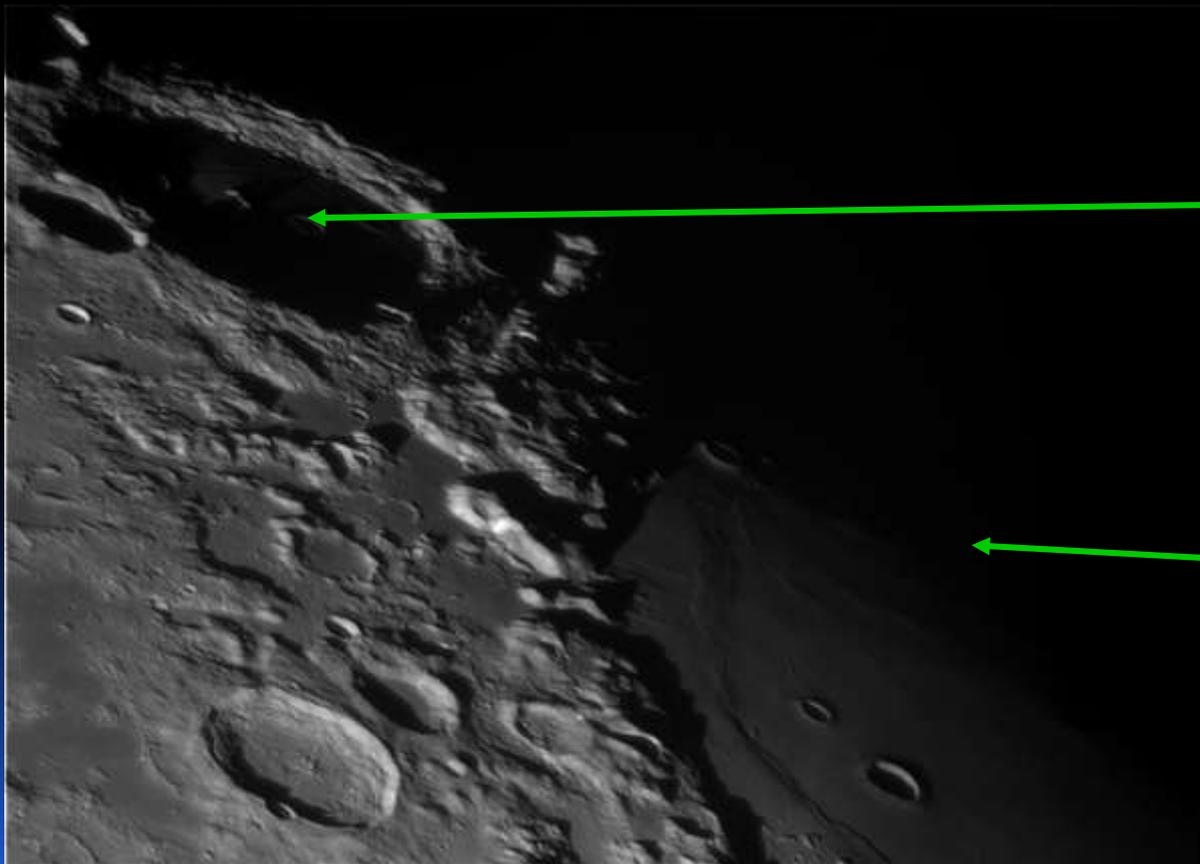
Cas standard

Un cas de surgissement, avec la côte anglaise
à 48-50 km, vue de Boulogne



Surgissement et étirement des îles Farallon vues depuis San Francisco, à une quarantaine de kilomètres (comparer avec l'image d'en bas, présentant un effet de *Fata Morgana*)

CLÉOMÈDE, *Du mouvement circulaire des corps célestes* (entre le I^{er} av. J.-C. et le II^e) semble être le premier à suggérer que la réfraction permettrait de voir le soleil couchant alors qu'il est déjà sous l'horizon, et tente d'expliquer par elle l'illusion de la lune, en **attribuant le tout à la réfraction entre l'air sec au niveau de l'observateur et l'air au loin, supposé humide donc plus dense – et plus réfringent (ce qui s'avère faux !)** – car CLÉOMÈDE connaissait la réfraction grâce au premier écrit qui la mentionne, dû à ARCHIMÈDE (III^e av. J.-C.), notamment entre l'air et l'eau !



Cratère lunaire
CLEOMEDES

Mare Crisium

PTOLÉMÉE traite de même l'illusion de la lune dans l'*Almageste*.



Dans le Livre V de son *Optique* (vers 170) il constate, puis explique par la réfraction à l'interface de l'air et de l'éther, le déplacement vers l'horizon nord (peut-être observé au moyen d'une sphère armillaire) des astres au levant ou au couchant.

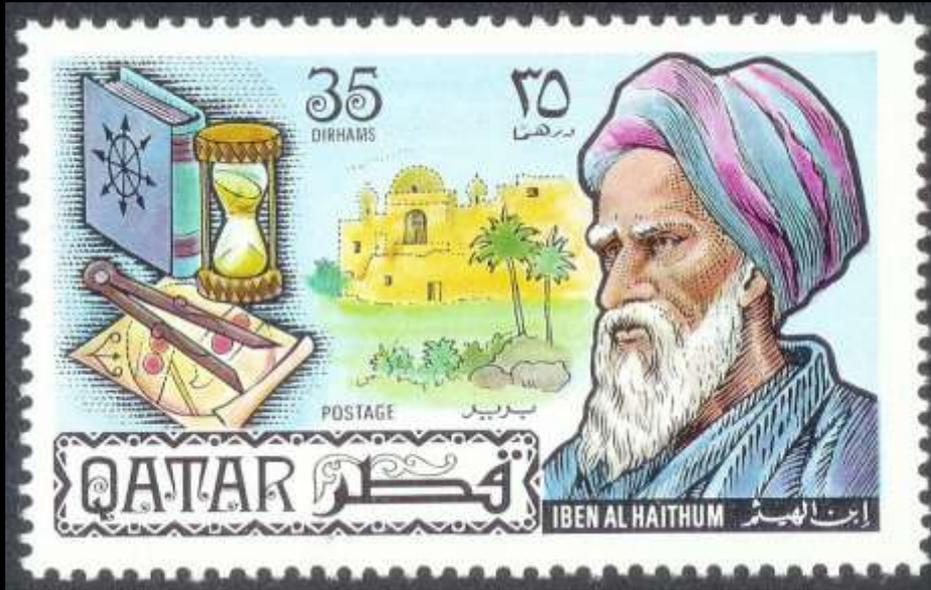


PTOLÉMÉE
(II^e siècle)



L'astronome grec Claude Ptolemee etudiant les constellations.

Ibn AL-HAYTHAM lui attribue l'aplatissement du soleil « couchant » : l'**accourcissement**.
Et il explique correctement l'illusion de la lune !

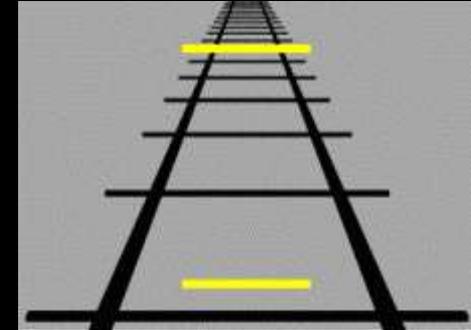


Ibn AL-HAYTHAM
(965-1039, communément
appelé ALHAZEN)



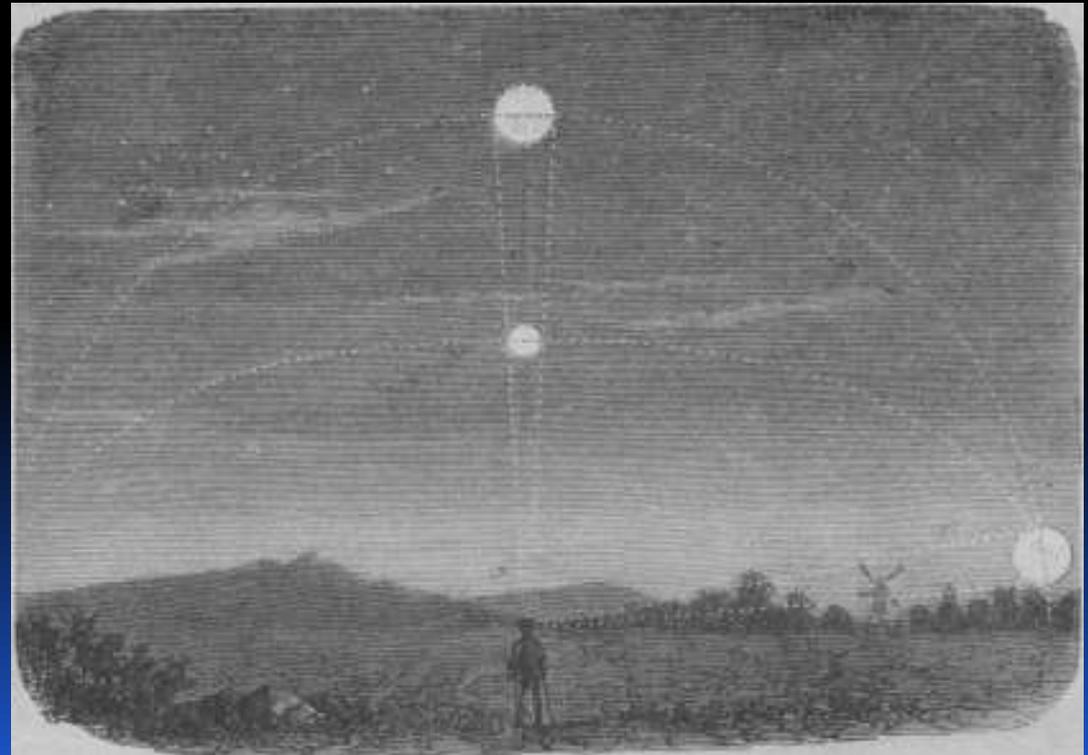
L'illusion de la lune : un effet psychologique sans lien avec l'optique !

Effet PONZO
Loi d'EMMERT



Représentation archétypale de la voûte céleste : un couvercle aplati

Elle est suggérée par le fait qu'à l'horizon on voit la lune souvent brumeuse (ce qui est moins fréquent quand elle est haute dans le ciel), et toujours derrière les objets terrestres les plus éloignés.



Évidemment, l'accourcissement affecte aussi l'image de la Lune.



Avec l'atmosphère standard, il se produit aussi une extinction sélective non uniforme, et une irisation des liserés (rouge en bas, vert en haut).

Les effets d'ondulation et de détachement sont le fait d'une atmosphère non-standard.



Nos perceptions étant liées à nos habitudes, quand celles-ci sont bousculées des perceptions peuvent être changées – et l'accourcissement paraître plus évident !



Tamas Ladanyi



Pic Du Midi / OMP
Les Observateurs Associés / FIDUCIAL
CLIMSOL1 - Halpha solar telescope
Raw Image 6562.82 Å
www.climso.fr

2012/10/29 10:05:54



Pic du Midi / Observatoire Midi-Pyrénées / CNRS
Les Observateurs Associés / FIDUCIAL
CLIMSO L2 - KCall solar telescope
Raw image 3933.682 Å
www.climso.fr

CLIMSO C1 - Halpha Coronagraph
Raw image 6562.82 Å



le vol IBERIA 3474 qui transite dans le 238 à 45 nautiques du Pic
il était au niveau 320 pour une vitesse sol de 420 kt
il assurait la liaison Madrid Zurich

2007/11/17 16:01:50

l'avion : un A320

mail de A.Nectoux OA

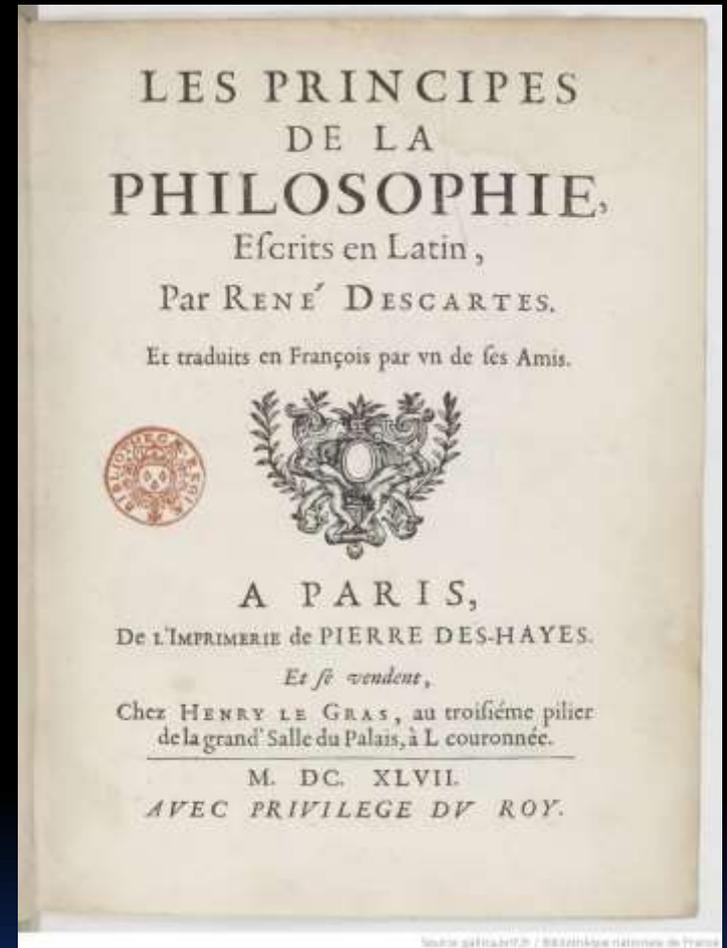


L'élargissement angulaire est dû à l'effet de la turbulence en fin de certaines journées, bien visible avec l'accourcissement quand le Soleil se rapproche de l'horizon.

R. DESCARTES, *Les Principes de la Philosophie*, Le Gras (1647, Paris) :
chap. 15 et Pr III art. 131



René DESCARTES (1596-1650)



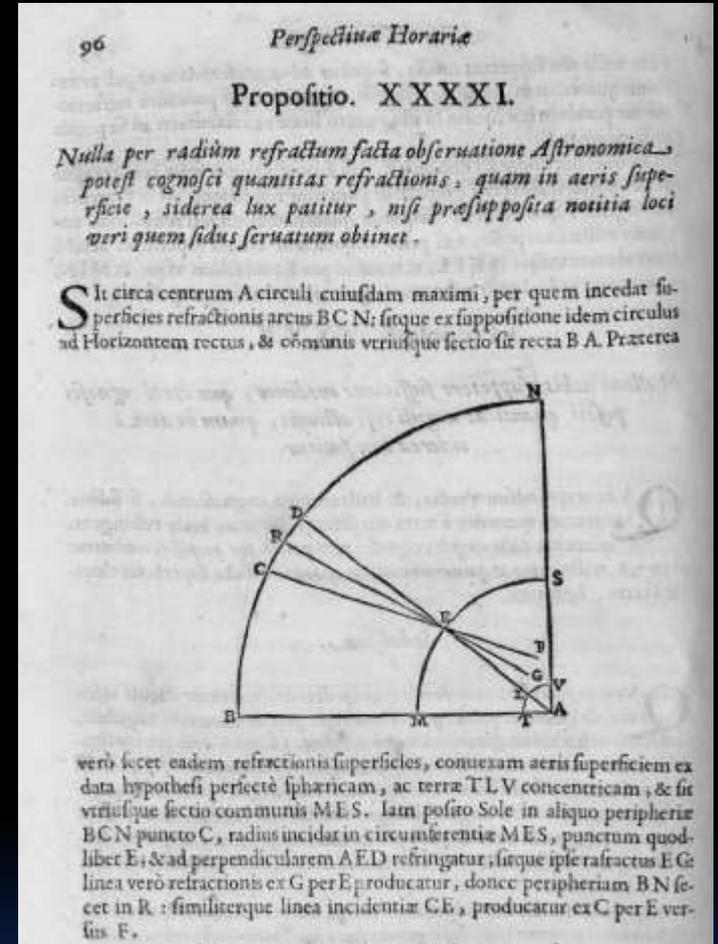
La réfraction de la lumière à la superficie des cieux fait « que nous ne voyons quasi jamais les étoiles dans le lieu où elles sont [...] et nous pourrions aussi en voir plus qu'il n'y en a. »

E. MAIGNAN, *Perspectiva horaria, Rubei* (1648, Rome)

Consacre ses pp. 94-104 à la réfraction astronomique, surtout pour dire qu'on ne peut pas la déterminer ; il considère qu'elle dépend de la « surface de l'atmosphère ».



Père minime toulousain
Emmanuel MAIGNAN (1601-1676)



Proposition 41

Par aucune observation astronomique effectuée sur un rayon qui se réfracte on ne peut connaître la valeur de la réfraction que la lumière d'une étoile subit à la surface de l'atmosphère, à moins d'avoir une connaissance préalable de la position réelle de l'étoile observée.



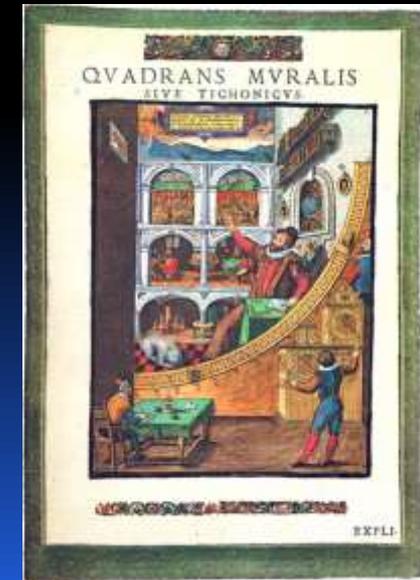
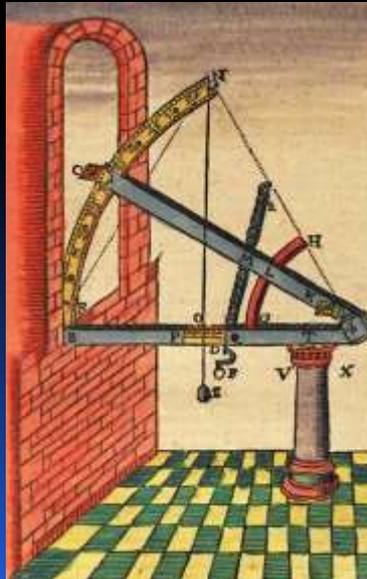
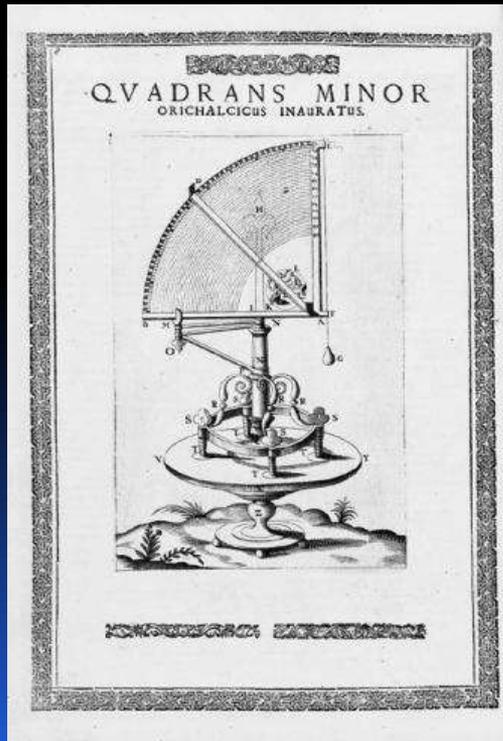
4 – Premières mesures précises tabulées

Dans T. BRAHÉ, *Astronomiae instauratae progymnasmata* (Prague, 1602) : tables empiriques.

Tycho BRAHÉ (1546-1601) avait, dans son observatoire danois d'Uraniborg, les meilleurs instruments de mesure de positions de l'époque (précision de 1-2', améliorée pour la première fois depuis PTOLÉMÉE – d'un facteur 10). Il considérait la réfraction pour corriger ses déterminations de positions.

Croyant que la réfraction dépend de la distance de la source et de son intensité, il dressa trois tables : une pour les étoiles (la plus juste), une pour le Soleil (4-5' en trop – cf. la fausse parallaxe solaire de 3'), et une pour les planètes !

L'Encyclopédie de DIDEROT critique les mesures de réfraction de Tycho : celui-ci croyait nulles les réfractions à plus de 45° de hauteur – elles sont invisibles à l'œil nu !



Tables reprises par Johannes KEPLER, *Tabulae Rudolphinae*, J. Saurus (Ulm, 1627)



Comme Tycho, KEPLER (1571-1630) avait conscience de l'importance des lois de l'optique pour interpréter correctement les observations astronomiques – alors que COPERNIC (1473-1543) l'ignorait.

Avec ces tables, il fit la première étude quantitative de l'aplatissement apparent du Soleil dans *Ad Vitellionem paralipomena, quibus Astronomiae pars optica traditur* (1604), suivi en 1615 par Christoph SCHEINER (1575-1650) – qui voulait revendiquer l'antériorité ?

KEPLER voulait aussi expliquer la rougeur de la Lune lors de ses éclipses.

Comme dans l'antiquité et comme Tycho, KEPLER considérait que l'atmosphère est un « océan d'air », avec une « surface d'atmosphère » – dioptré air-éther.



Frontispice des *Tabulae Rudolphinae*

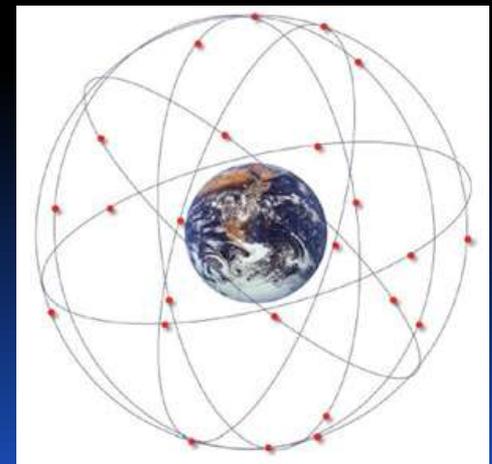
5 – Motivations actuelles

Une connaissance précise de la réfraction reste indispensable :

- en astronomie-astrophysique,
 - pour le pointage correct des télescopes et l'astrométrie,
 - pour le bon usage des corrections de mesures photométriques ;selon STONE la précision requise dans les mesures astrométriques fines est $0,05''$ à plus de 20° de hauteur (où la réfraction est $147''$), $1''$ près de l'horizon (la réfraction horizontale étant $34' \cong 2000''$), soit $0,04\%$ d'erreur tolérable ;
- en géodésie-géophysique, elle conditionne les performances des mesures par VLBI, orbitographie satellitale, et GPS (les satellites utilisés étant souvent vus bas sur l'horizon, et la correction de célérité étant liée à la valeur de la réfraction).

Précision des tables actuelles : $0,3\%$

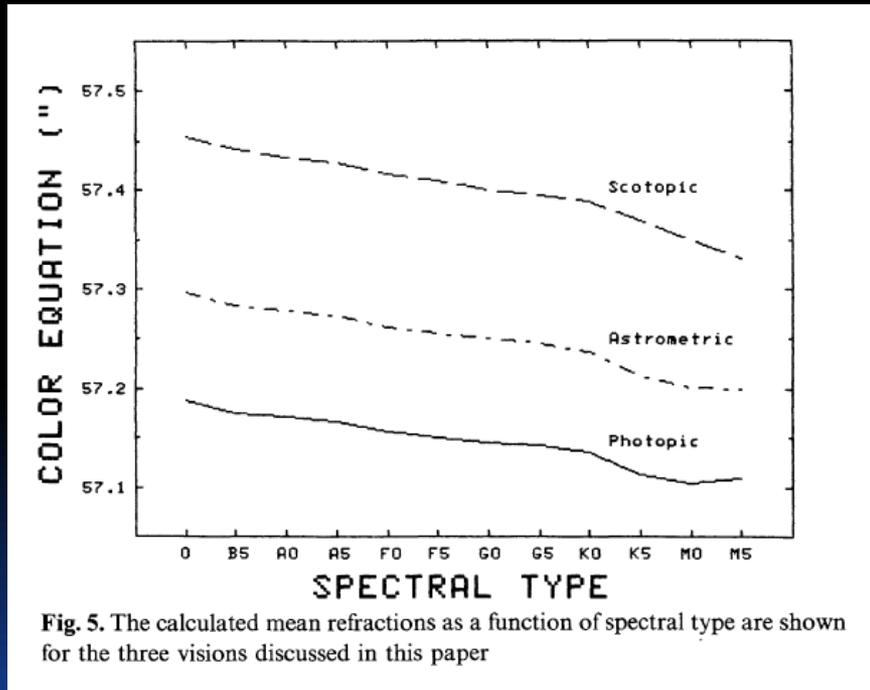
(au-delà, il faut tenir compte de l'aplatissement terrestre, donner la température mieux qu'à 1° près, etc. ; des calculs personnalisés sont possibles mais non tabulés).



PROBLÈMES POUR L'ASTROMÉTRIE FINE

Le passage de la vision photopique à la vision scotopique entraîne, à cause de l'effet PURKINJE et de la dispersion de l'air, une variation de $0,2''$ sur la hauteur apparente moyenne des étoiles vues à 45° du zénith (*cf. fig. infra*).

Et le type spectral intervient autant car le spectre de l'étoile en dépend (ainsi que de la classe de luminosité, mais moins) : $-(0,022'' \pm 0,003'')$ $\tan Z$ par type spectral, d'après VAN HERK (1952).



(la courbe « astrométrique » est sujette à caution...)

Pour des étoiles à $Z = 45^\circ$, d'après R. C. STONE, « The effect of differential color refraction on declinations determined in meridian circle programs », *Astron. Astrophys.* **138**, 275-284 (1984).

Charting a New Course: Celestial Navigation Returns to USNA

Story Number: NNS151015-27 Release Date: 10/15/2015 3:34:00 PM



By Lt. j.g. Devin Arneson, U.S. Naval Academy Public Affairs

ANNAPOLIS, Md. (NNS) -- Picture this: A naval vessel is navigating the high seas thousands of nautical miles from land. Suddenly all navigation systems become inoperable. What happens next? What does this mean?

The Navy looks to its past to chart its future. With today's technology rapidly advancing, the Navy realized that many basic techniques are still relevant to safe operations at sea.

Celestial Navigation (CELNAV) is one skill that has not been formally taught to Navy officers, depending on one's commissioning source, for more than 15 years. Officer Candidate School did not teach CELNAV, NROTC stopped teaching it in 2000 and the Naval Academy removed it in 2006.

Based on direction from the Chief of Naval Operations, CELNAV has been reinstated into the navigation curriculum and is a requirement in the Officer Professional Core Competencies Manual. This administrative change ensures the instruction will be an enduring requirement.

The Naval Academy resumed classroom instruction during the summer session of 2015. The class of 2017 will be the first in many years to graduate with a basic knowledge of CELNAV.

"Teaching CELNAV is just one thing necessary to learn in order to get ready for the battlefield that's already out there. Cyber affects all battlefields to include sea, land, air and space," said Director of Center of Cyber Security Studies Capt. Paul J. Tortora.

Cyber threats aren't the most likely reason electronic navigation systems might fail. System degradation, electrical failures, satellite malfunctions, there are any number of reasons GPS might be rendered unusable on board a ship.



[Download High Resolution](#)

151015-N-XL102-049 ANNAPOLIS, Md. (Oct. 15, 2015) Lt. Daniel Stayton gives classroom instruction on celestial navigation (CELNAV). The Naval Academy reinstated CELNAV classroom instruction during the summer session of 2015. The Class of 2017 will be the first in many years to graduate with a basic knowledge of CELNAV. (U.S. Navy photo by Mass Communication Specialist 2nd Class Tyler Caswell/Released)

October 16, 2015

RELATED CONTENT

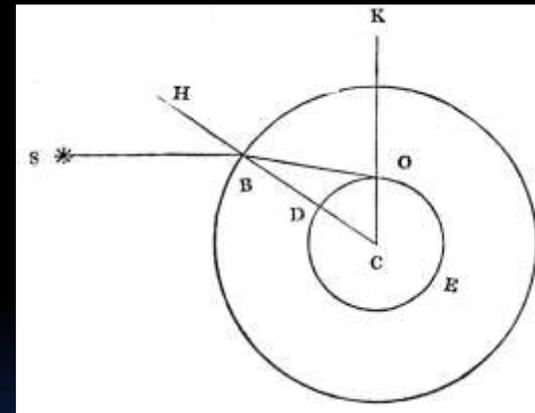
[New Celestial Navigation and Geodesy Training Modules Available Online - 6/11/2015](#)

La justesse du point astronomique dépend cruciallement des corrections de dépression de l'horizon, d'accourcissement et de réfraction.

I - LES FONDATEURS

Première théorie quantitative en 1662 par Giovanni Domenico CASSINI

Comme BRAHÉ, KEPLER et Maignan, il croit l'atmosphère limitée. Il modélise l'effet de l'atmosphère de la même manière que Ptolémée, comme un dioptre sphérique entre le vide et l'air supposé homogène ; il introduit alors la « **hauteur de l'atmosphère homogène** » ou « **hauteur réduite** » H , qu'il estime à 2 000 toises.



Ainsi, il montre que \mathcal{R} n'est pas nul en-dessous de 45° de distance zénithale ; et il devine que les variations saisonnières de \mathcal{R} sont dues à la variation de température, **mais oublie la pression** – **contrairement à HALLEY (1720)**.

Tous ses calculs sont sans formules, uniquement fondés sur des rapports géométriques traduisant les lois de la réfraction !





Sauf près de l'horizon, ce modèle était (en vertu de la loi de SIMPSON) encore utilisé par le *Bureau des Longitudes* au XIX^e : son exactitude est meilleure que celle de toute autre formule plus savante jusqu'à 74° de distance zénithale (0,051" d'erreur pour la table de CASSINI, qui donc satisfait l'exigence de STONE presque jusqu'à 74°) ; pour celle-là l'erreur devient 1" à 81° mais croît très vite au delà (13' à l'horizon).

La renommée de CASSINI est en partie due à ses calculs sur le Soleil (1656) et sur la réfraction, lui permettant de montrer, en collaboration avec RICHER envoyé à Cayenne au moment de l'opposition de Mars de 1672, que **la parallaxe solaire est bien inférieure à 1'** ; ils la mesurent avec seulement 10 % d'erreur.

Cela permit aussi la construction des nouvelles tables de la Lune par MAYER (1753), proposées pour la détermination de la longitude en mer.

Giovanni Domenico CASSINI (1625-1712) concepteur et premier directeur de l'Observatoire de Paris, fondé en 1667.

I- Les fondateurs

II- Les géodésiens expérimentateurs

III- Les classiques

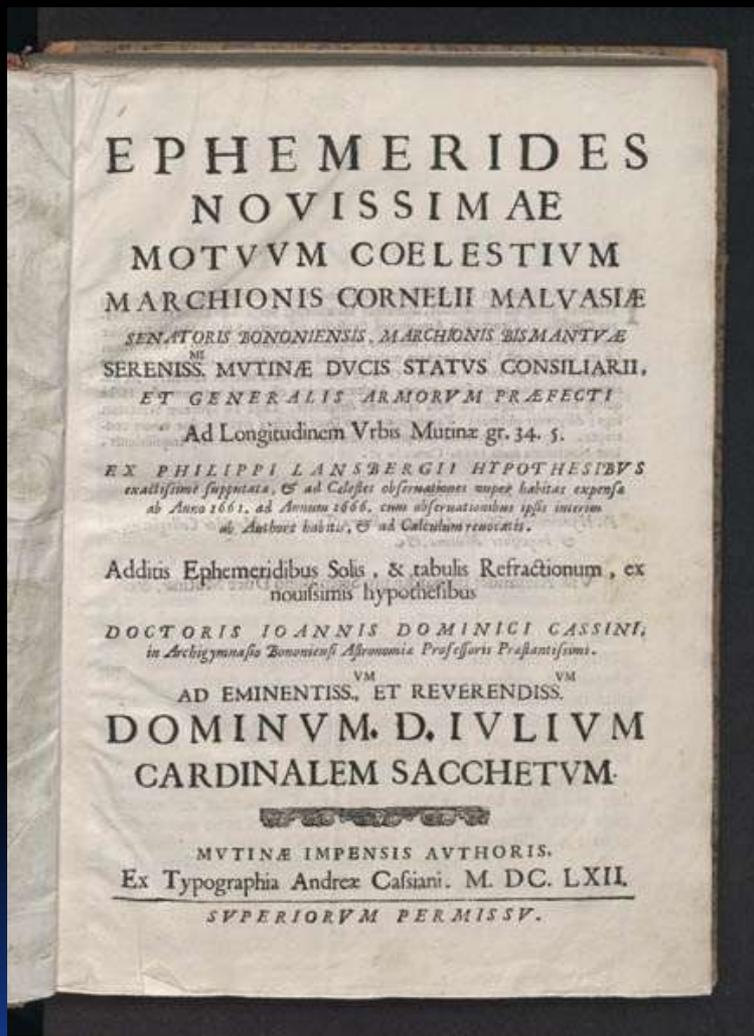
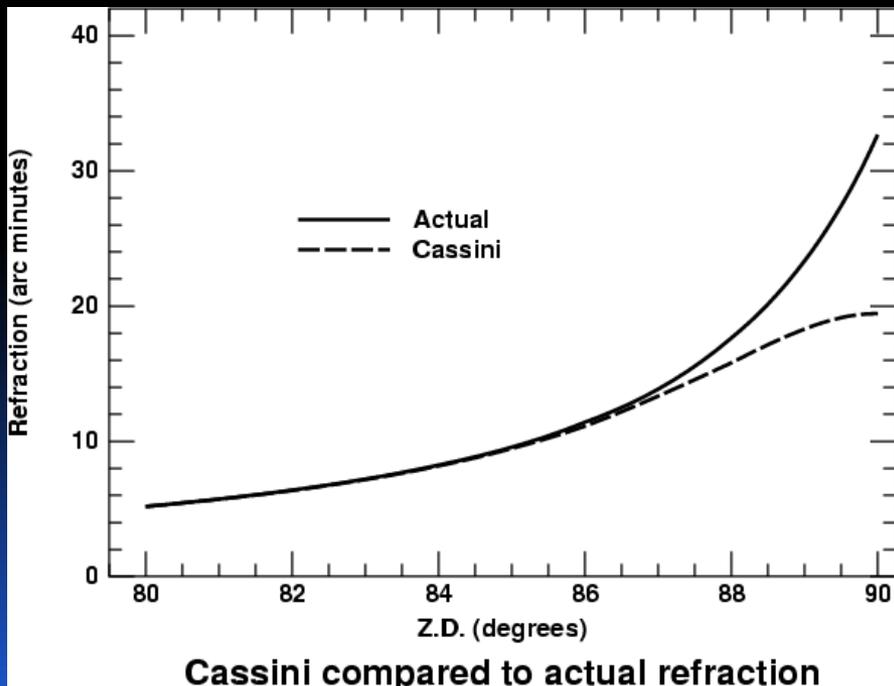
IV- Les géodésiens métrologistes

V- Les continuateurs et les ouvreurs

Confiant envers les mesures de Tycho, KEPLER avait déjà prévu dans son livre de 1604 que la méthode utilisée ensuite par CASSINI ne donnerait pas le bon profil de réfraction expliquant l'aplatissement apparent du Soleil au voisinage de l'horizon.

Mais au lieu de remettre en cause le modèle d'atmosphère, il mettait en doute la loi de la réfraction, et trouvait même qu'aucune loi basée sur la trigonométrie ne pourrait arranger ce problème !

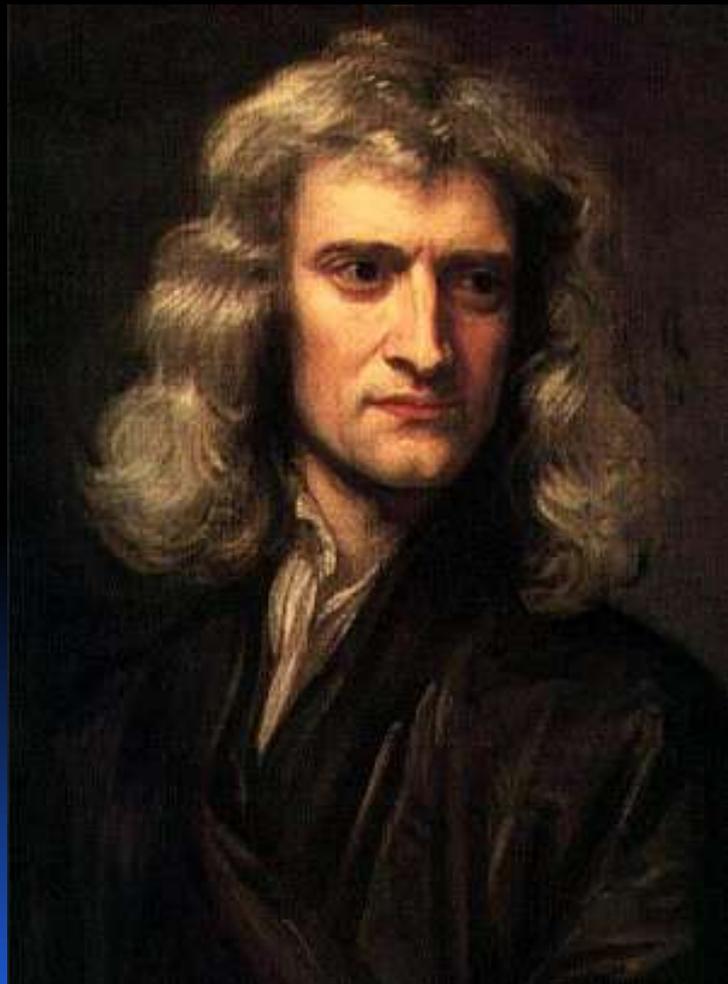
Vers 1665 RICCIOLI (1598-1671, astronome en chef de l'Église) écrit à CASSINI en signalant le même problème celui prévu par KEPLER (1604) ; CASSINI répond que ses calculs sont justes...



Éphémérides publiant la table de CASSINI (1662)

Isaac NEWTON, *Opticks*, t. II, Royal Society (Londres, 1704)

Considère le cas d'une atmosphère stratifiée, avec une densité proportionnelle à son « *pouvoir réfringent* » ($n - 1$: *réfractivité* en termes actuels), la vitesse des « *molécules de lumière* » étant proportionnelle à n .

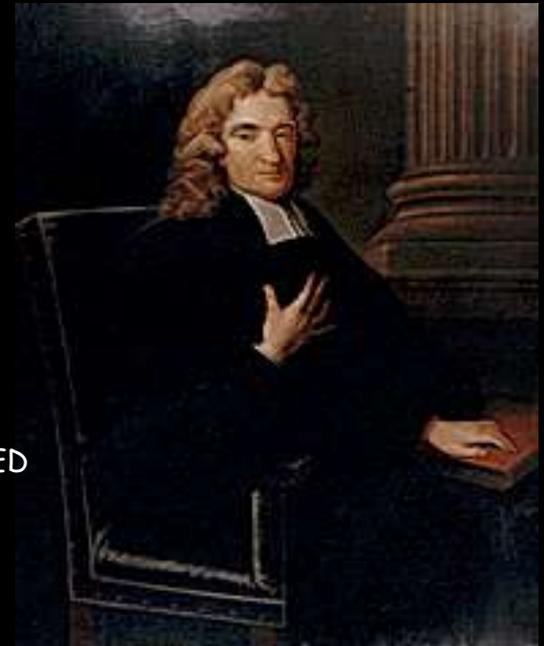
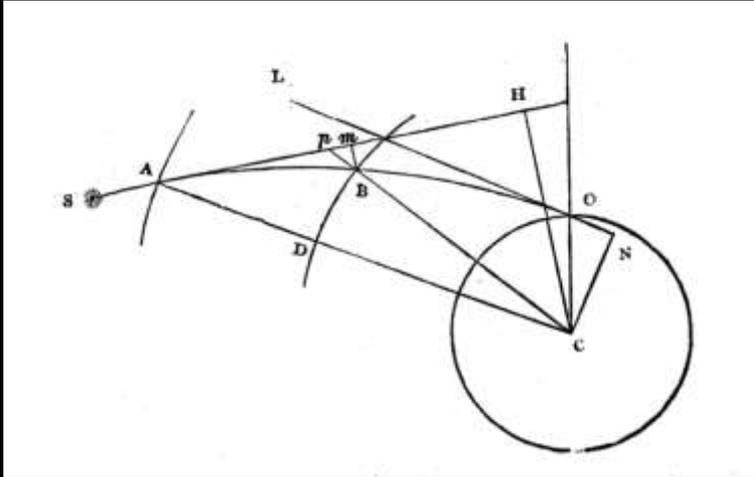


The Refraction of the Air in this Table is determin'd by that of the Atmosphere observed by R 4.

248. OPTICKS.

by Astronomers. For, if Light pass through many refracting Substances, or Mediums gradually denser and denser, and terminated with parallel Surfaces, the Sum of all the Refractions will be equal to the single Refraction which it would have suffer'd in passing immediately out of the first Medium into the last. And this holds true, though the Number of the refracting Substances be increased to Infinity, and the Distances from one another as much decreased, so that the Light may be refracted in every Point of its Passage, and by continual Refractions bent into a Curve-Line. And therefore the whole Refraction of Light in passing through the Atmosphere from the highest and rarest Part thereof down to the lowest and densest Part, must be equal to the Refraction which it would suffer in passing at like Obliquity out of a Vacuum immediately into Air of equal Density with that in the lowest Part of the Atmosphere.

NEWTON, correspondance avec FLAMSTEED, 1694-1695



John FLAMSTEED
(1646-1719),
premier *Royal
Astronomer*

NEWTON (1642-1727) considère le mouvement à force centrale des « *molécules de lumière* ». Il en déduit la réfraction \mathcal{R} , sous forme d'une intégrale où intervient le profil de densité de l'air, arbitrairement supposé affine ; il estime numériquement cette intégrale et en déduit une table de \mathcal{R} (distinguant été, hiver et printemps-automne, pour des hauteurs inférieures à 30°). Il l'envoie à FLAMSTEED le 17 / 11 / 1694, mais ne veut pas publier car il trouve ses tables imprécises (lettre du 4 / 12 / 1694) et son modèle irréaliste (lettre du 15 / 01 / 1695).

Puis il reprend ces calculs pour un profil allusivement indiqué (exponentiel, qu'il justifie dans le **cas isotherme** – alors qu'il ne connaissait pas l'équation des gaz parfaits) ; en 1695 il en déduit une nouvelle table qu'il donne à FLAMSTEED, puis à HALLEY qui la publie enfin en 1721 dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society*. Elle indique une **croissance trop forte de \mathcal{R} sur l'horizon**, car NEWTON ne tenait pas compte du gradient de température au niveau de l'observateur.

Brook TAYLOR, *Methodus Incrementorum directa & inversa*, Prostant apud Gul. Innys (Londini, 1715)

Inventeur des séries de Taylor, qui seront très utilisées dans les calculs de \mathcal{R} .

Le premier à utiliser son théorème d'intégration par parties dans l'étude de \mathcal{R} .



Trouve que le **coefficient de réfraction** de l'atmosphère est $k \cong 1 / 5$ (en moyenne auprès du niveau de la mer), ce qui est important pour la géodésie (où on prend plutôt $k \cong 1 / 6$ à cause de l'altitude plus grande des points géodésiques) : c'est la ***courbure des rayons horizontaux divisée par la courbure méridienne de la Terre.***

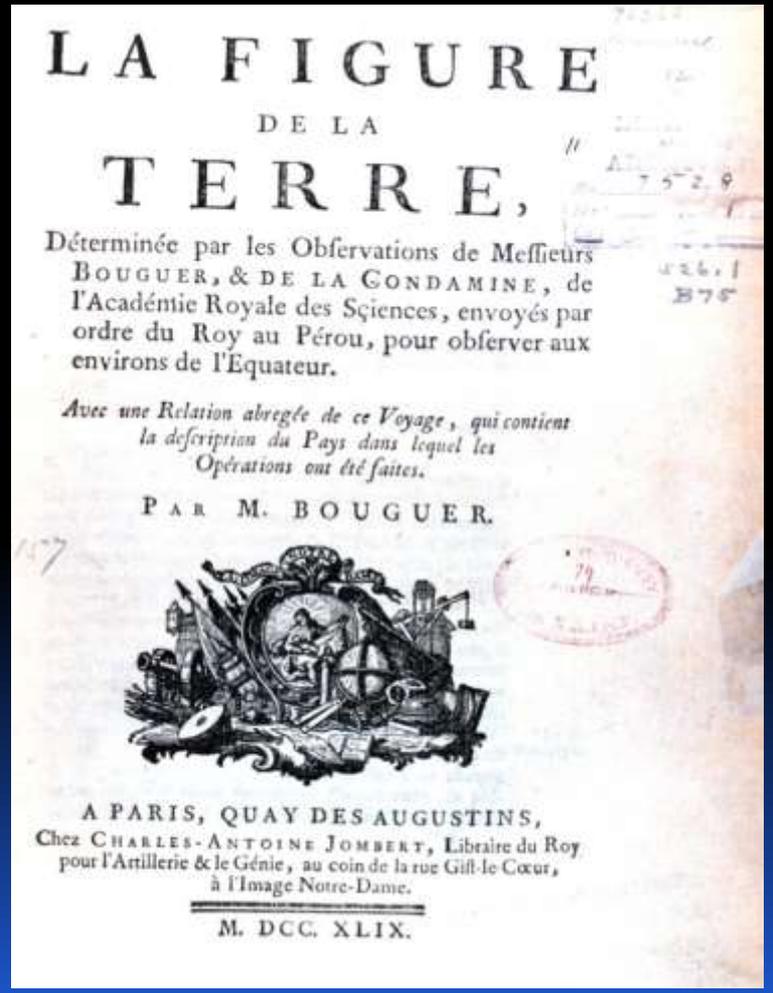
II - LES GÉODÉSIENS EXPÉRIMENTATEURS

Pour les besoins de la **géodésie** : controverses du XVIII^e sur la forme de la Terre !



La connaissance de la réfraction usuelle a une grande importance en géodésie – pour les calculs de nivellement, et ceux des coordonnées.

Ex. : en 1739 LE MONNIER reprit *seulement* les repérages astraux de PICARD, en tenant compte *incomplètement* de la réfraction que celui-ci négligeait (et de la nutation et de l'aberration qu'il ignorait), ce qui fit passer le "degré de PICARD" (1670) de 57 060 à 57 183 toises.



I- Les fondateurs

II- Les géodésiens expérimentateurs

III- Les classiques

IV- Les géodésiens métrologistes

V- Les continuateurs et les ouvreurs

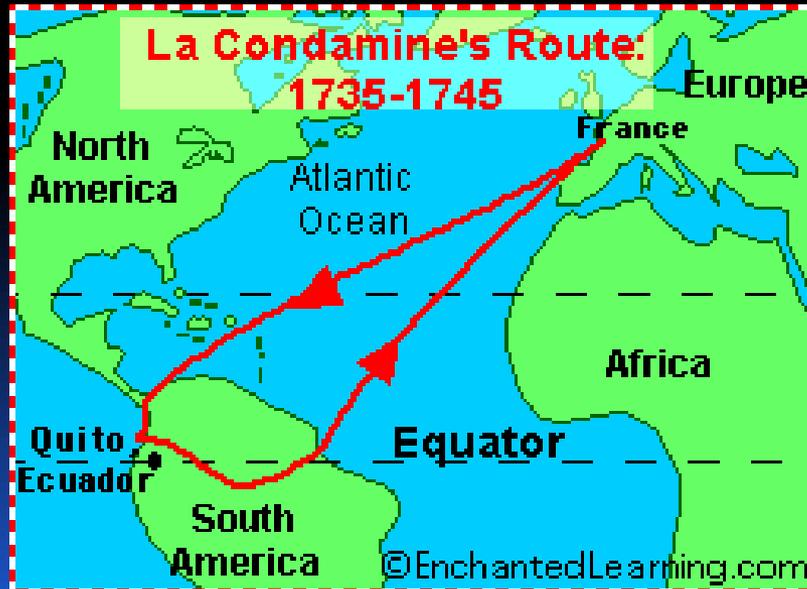
Pierre BOUGUER (1698-1758) : astronome ayant participé à la mesure d'un arc de méridien au Pérou, nécessitant le calcul de corrections dues à \mathcal{R} .



« Sur les réfractions astronomiques », *Hist. Acad. Roy. Sci.* **1739**, 45–48 (1741)

BOUGUER « a découvert un autre fait formellement contraire à ce qui paroissoit bien établi », et qui trouble aussi son lointain collègue LE GENTIL : sur le volcan Pichincha, à 527 toises au dessus de Quito, « On y respiroit à peine à cause de la grande subtilité de l'Air à cette hauteur, & le froid y étoit extrême », mais \mathcal{R} était plus faible qu'à plus basse altitude, contrairement au calcul de CASSINI (qui prévoyait une augmentation imperceptible de \mathcal{R} en fonction de l'altitude) ; formé aux idées de CASSINI, BOUGUER ne voit pas le lien causal entre les baisses de pression, de $n - 1$ et de \mathcal{R} (alors que HALLEY l'avait deviné dès 1720).

Il considérait que l'air et la « matière réfractive » de l'atmosphère ne forment pas un mélange homogène...



P. BOUGUER, « Sur les réfractions astronomiques dans la Zone Torride », *Mém. Acad. Roy. Sci.* **1739**, 407–423 (1741)

Dans cette lettre de Quito le 24 Juillet 1737, il évoque son calcul de nouvelles tables de \mathcal{R} .

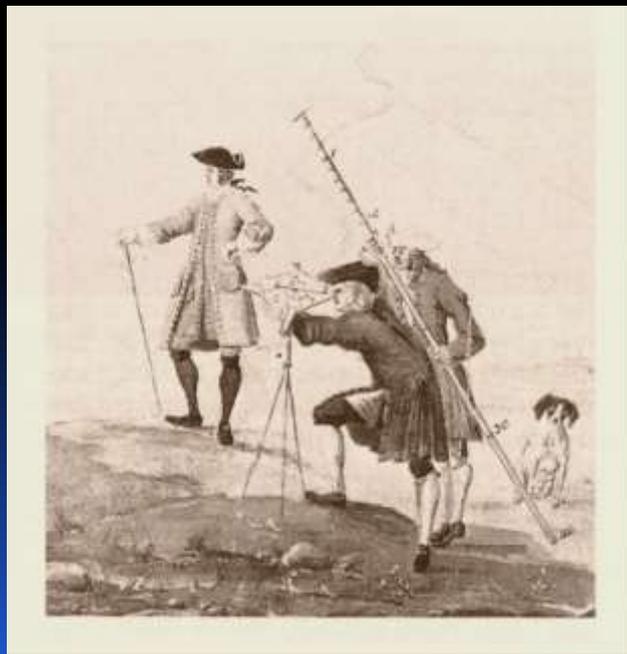
- À propos de la contradiction avec le modèle de CASSINI, il **prévoit l'effet modérateur, sur la baisse de \mathcal{R} avec l'altitude, de la baisse de température (absolue T)** : en altitude « *le froid, [...] en condensant l'air, peut faire une espece de compensation, & rendre l'inégalité moins considérable.* »

Pour étudier cette décroissance de \mathcal{R} en fonction de l'altitude il concentre ses mesures de \mathcal{R} vers une hauteur de 15° au-dessus de l'horizon, car « *Au-dessous, les Réfractions sont trop variables, & au-dessus trop petites, pour pouvoir être saisies avec précision.* » Mais il n'identifie pas explicitement la cause de cette décroissance : la baisse de réfractivité au niveau de l'observateur.

- Il estime que n décroît, dans l'atmosphère supposée limitée, en $1/r^m$ avec $1/m \cong 7$ (noter qu'avec ce profil d'indice, $k = m$).

*« Courriers de la physique, argonautes nouveaux,
Qui franchissez les monts, qui traversez les eaux,
Ramenez des climats soumis aux trois couronnes
Vos perches, vos secteurs et surtout deux Lapones,
Vous avez confirmé dans ces lieux pleins d'ennui
Ce que Newton connut sans sortir de chez lui. »*

VOLTAIRE, *Discours en vers sur l'homme*
IV. De la modération en tout



P. BOUGUER, « Second mémoire sur les réfractions astronomiques, observées dans la Zone Torride ; avec diverses remarques sur la manière d'en construire les Tables », *Mém. Acad. Roy. Sci.* **1749**, 75–112 (1753)

- Il s'interroge sur « *la matière qui cause la réfraction & qui est répandue dans l'air [...] Il se pourroit fort bien qu'il n'y eût point de matière réfractive, & que les réfractions répondissent, non pas aux dilatations de l'air grossier, mais à une certaine fonction de ces dilatations* ».
- Il démontre l'**invariant d'un rayon dans un milieu continu à symétrie sphérique** : $I = n r \sin \theta$
- Il note que **si n variait en $1 / r^m$ avec $m = 1$ le rayon serait une spirale logarithmique**, et qu'il serait possible qu'un tel rayon suive une courbe qui « *s'étendrait circulairement tout autour de la Terre, & elle ne seroit bornée que par l'Observateur même, qui se verroit de dos.* »
- $k \cong 1 / 8$ à $1 / 7$ ($< 1 / 6$ à cause de l'altitude des Andes).
- Il comprend que **$m > 1$ produirait une coupure dans l'image du ciel de part et d'autre de l'horizon astronomique**.
- Il revient, par plusieurs méthodes expérimentales, sur l'estimation de m donnée dans l'article précédent, et trouve $1 / m$ compris entre $7 \frac{5}{8}$ et $9 \frac{1}{8}$.
- Il montre que la réfraction *horizontale* varie avec m environ comme $m^{1/2}$, l'indice au niveau de l'observateur étant fixé.

- Il étudie, à des hauteurs inférieures à 8° , la variation journalière de \mathcal{R} ,

Déjà Tycho en 1599, réfugié au château de Benatek, s'y intéressait ; il écrivit au dos d'un brouillon de lettre : « *Potissima igitur et varior refractionum causa, est in vaporis Terrae superfici perpetuo imminentibus, qui aerem nobis proximum paululum crassiorem minusque diaphanum quam est superior emis portio, reddunt.* » = « *La cause la plus puissante – relativement variable – de la réfraction réside dans les vapeurs perpétuellement en suspens à la surface de la Terre, qui nous rendent l'air le plus proche un peu plus dense et moins transparent que ne l'est la portion supérieure de [emis ?].* »

Cet effet était étudié aussi par Christoph ROTHMAN (astronome du Landgrave Wilhelm IV) ; l'idée de Tycho sera reprise par P. PERRAULT, *De l'origine des fontaines*, Pierre le Petit (Paris, 1674). Il faudra attendre 1806 pour savoir que l'influence de la vapeur d'eau est négligeable (mais l'idée contraire restera tenace), sauf dans le cadre des travaux actuels d'astrométrie fine.

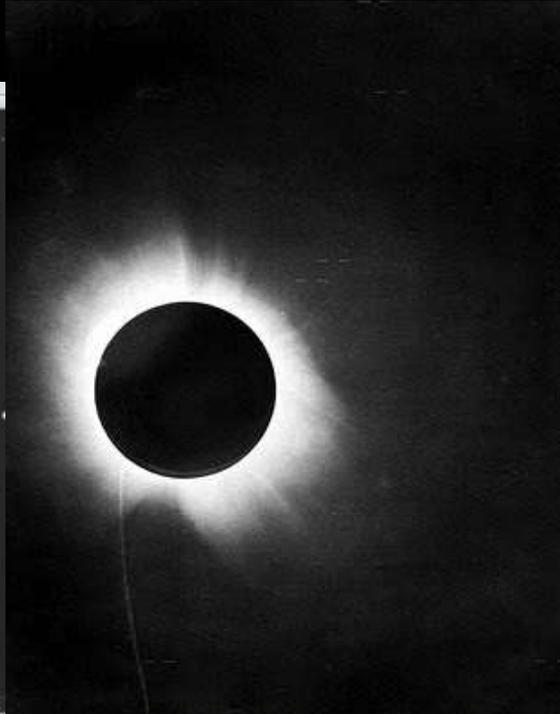
BOUGUER constate pour les valeurs de \mathcal{R} (à une hauteur inférieure à 7°) un accroissement relatif la nuit entre $1/6$ et $1/7$:

« *Sans doute qu'elles ne sont jamais portées plus loin que quelque temps avant le lever du Soleil : c'est alors que le froid est le plus grand ; l'atmosphère plus condensée doit avoir perdu le plus de sa hauteur, au moins par sa partie inférieure, & il n'est guère vrai-semble que la matière réfractive ne participe aussi un peu à cette altération.* » Cette explication reste dans le cadre du modèle de CASSINI, alors qu'à ce sujet elle est quantitativement très insuffisante !

Domage qu'il n'ait pas effectué de mesure de T au sol : sa baisse nocturne relative est inférieure à $1 / 6$! Il invoque (inutilement) l'effet (négligeable) de la vapeur d'eau (auquel, comme CLÉOMÈDE, BRAHÉ et PERRAULT – mais pas KEPLER – les astronomes ont cru très longtemps) ; cependant il écrit par ailleurs, sans la signer, une phrase ambiguë plus proche de l'interprétation correcte : « *Les variations diurnes des réfractions ne sont probablement dûes qu'à la dilatation des couches les plus basses de l'atmosphère* ».

N. B. : cet effet est l'une des causes d'incertitude des observations d'EDDINGTON et al. pour tester la théorie de la relativité générale lors de l'éclipse de 1919 (déplacement de $1,7''$ au bord du Soleil).

GAUSS avait déjà compris la difficulté de tester la courbure de l'espace lors de sa tentative de 1820 avec le grand triangle Brocken-Inselsberg-Hohen Hagen (somme des angles mesurés : $179^\circ 59' 59,32''$).



- Il s'inquiète de l'effet, sur \mathcal{R} , de l'aplatissement terrestre : « *La courbure de la circonférence de la Terre se trouvant plus grande dans le sens du méridien que dans celui du premier vertical,* » i.e. vers l'est (ou l'ouest), \mathcal{R} doit être plus grand pour celui-ci – mais cet effet est ordinairement négligeable.

Remarque : étude des variations de la réfraction au voisinage de l'horizon

Des réfractions horizontales atteignant plusieurs degrés ont été relevées, d'abord dans les contrées polaires (cas extrême : l'effet Novaya Zemlya), mais aussi à Athènes, à San Diego... KEPLER, dans *Ad Vitellionem Paralipomena*, relate une observation de Vénus refusant de se coucher pendant 15 min alors que sa position réelle atteignait 2° sous l'horizon.

La variabilité de la réfraction horizontale est beaucoup plus grande que celle de la réfraction pour des distances zénithales inférieures à 77° .

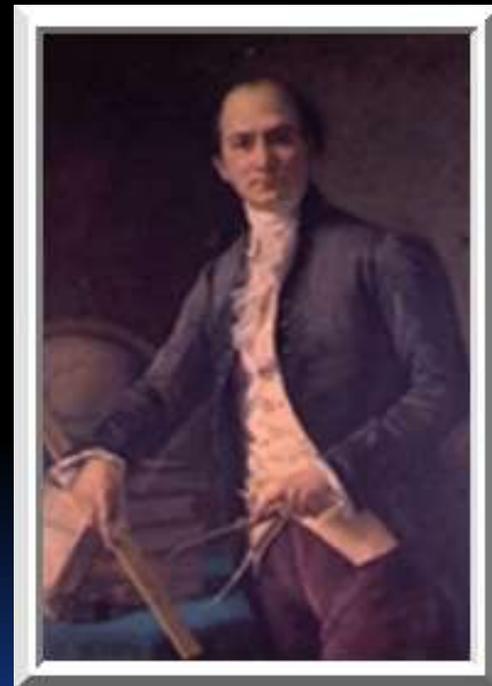
On lit dans J.-B. J. DELAMBRE, *Astronomie Théorique et Pratique, Tome Premier*, Courcier (Paris, 1814) :

« dans des circonstances qui étaient les mêmes en apparence, la réfraction variait de 15 à 20" sans qu'on pût en soupçonner la cause ; mais les variations sont encore bien plus sensibles à l'horizon, on en jugera par le tableau suivant »

qui cite, entre deux jours à même pression et température, des différences de réfraction à une distance zénithale donnée pour une même étoile : 6 ou 7" à 75° ; 10 ou 11" à 77° ; 15" à 79° ; plus de 30" entre 82° et 86° ; 35" à 88° ; 45" à 89° (les écarts mentionnés en dessous de 80° doivent en grande partie résulter d'erreurs d'observation, dues à la turbulence, etc.).



Jean-Baptiste DELAMBRE (1749-1822) a réalisé, pour déterminer le mètre, une moitié de la triangulation du méridien – en tenant compte des altitudes (1792-1799).



J.-B. BIOT assure (1806) que **la première de ces variations ne peut pas être due à la vapeur d'eau** : il fut l'un des premiers à mesurer l'indice de plusieurs gaz...

Remarque : étude expérimentale de l'indice de l'air

- Première mesure en laboratoire : J. LOWTHORP, « An experiment of the refraction of the air made at the command of the Royal Society, Mar. 28. 1699 », *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* **21**, 339–342 (1699) ; par un rapport de sinus, trouve $n \cong 1,00036$. Confiant, il écrit « *it would be more than probable that the Refractive Powers of the Atmosphere are every where, at all heights above the Earth, proportional to it's Densities and Expansions. And here it would be no difficult matter to trace the Light through it* »...
- F. HAUKSBEЕ, *Physico-Mechanical Experiments on Various Subjects*, R. Brugis (Londres, 1709) : mesure la déviation des rayons traversant un prisme creux rempli d'air, et montre (à 5 % près) qu'elle est proportionnelle à sa densité.
- J.-B. DELAMBRE, *Mém. de l'Inst. (Paris)* **7** (1806) déduit la valeur de l'indice de l'air dans le visible, à partir d'un grand nombre de valeurs de la réfraction astronomique.
- J.-B. BIOT et F. ARAGO, « Mémoire sur les affinités des corps pour la lumière, et particulièrement sur les forces réfringentes des différents gaz », *Mém. Inst.* **7**, 39-66 (1806) : utilisent la même méthode que HAUKSBEЕ, mais avec un meilleur prisme, et l'appliquent à plusieurs gaz.



- Première mesure interférentielle : J. JAMIN, *Ann. Chim. Phys. 3^e série* **49**, 282 (1857).

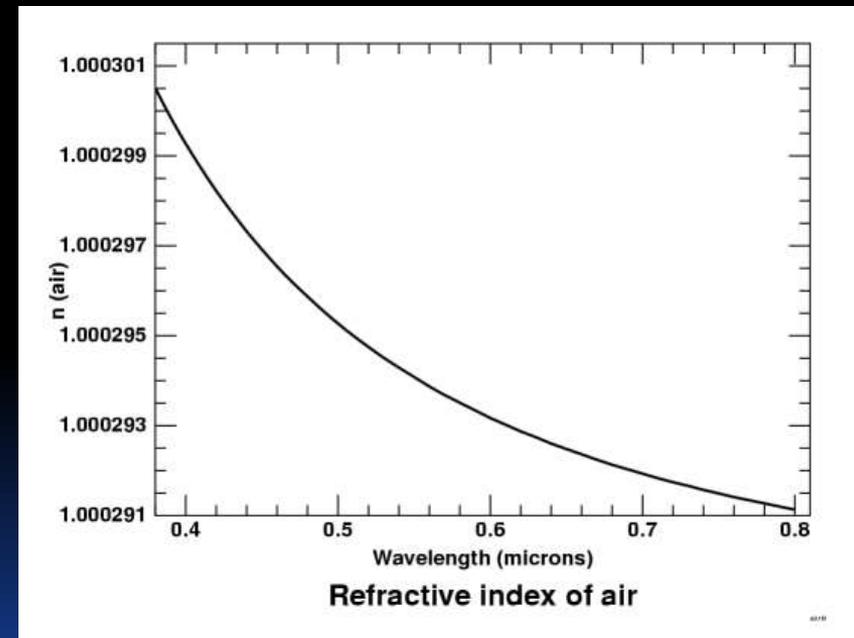
Jules Célestin JAMIN (1818-1886)

Dispersion

- CAUCHY postulait que les gaz sont non dispersifs, ce qui lui attira les foudres d'ARAGO à l'Académie des sciences en 1836 : F. ARAGO, *C. R. Acad. Sci.* **3**, 233 et 459-462 (1836).
- Première mesure *précise* de la dispersion de l'air (avec l'interféromètre de JAMIN) : KETTELER, *Ann. Phys. (Leipzig)* **104**, 390 (1865).
- D'après E. R. PECK et K. REEDER, « Dispersion of air », *J. Opt. Soc. Am.* **62**, 958-962 (1972), avec une erreur maximale de 0,001 % sur la réfractivité de l'ancien air normal (*i.e.* sec, à 15 °C et 1 atm, avec 330 ppmv de CO₂) de 0,23 μm à 1,69 μm :

conclude that a two-term formula, with only four parameters, is satisfactory for representing all of the data, from the farthest ir measurements to nearly 0.23 μm. Such a formula is

$$(n-1) \times 10^8 = \frac{5\,791\,817}{238.0185 - \sigma^2} + \frac{167\,909}{57.362 - \sigma^2} \quad (2)$$



Graphe d'après (2) à 0 °C

in [4]

Cette formule garantit donc, quant à la dispersion de l'ancien air normal, la précision de 0,04 % requise pour l'estimation de la réfraction en astrométrie fine.

Influence de la vapeur d'eau

Il ne leur a pas paru que l'état de l'hygromètre eût une influence appréciable sur le pouvoir réfractif lorsque le ciel est pur, et l'air transparent. Ils se proposent des recherches ultérieures sur cet objet et sur la force réfractaire des vapeurs; et comme ces expériences exigent de hautes températures, ils sont obligés

Sc. et Arts, Vol. 31, N°. 1, Mai 1806, B.

c. r. sur J.-B. BIOT et F. ARAGO (1806)

En 1816-1818, FRESNEL et ARAGO ont utilisé un interféromètre à deux voies portant des tubes d'un mètre, l'un rempli d'air humide, l'autre d'air desséché progressivement au KOH : déplacement de 1,25 interfrange.

En 1852 FIZEAU améliore cette expérience avec des compensateurs de JAMIN.

En 1858 JAMIN reprend cette expérience avec des tubes de 3 m.

in J. JAMIN, *Cours de physique de l'École polytechnique, t. 3 fasc. 3 – Étude des radiations – Optique physique*, Gauthier-Villars (Paris, 1887)

point sensiblement de ceux que Dulong avait trouvés. Arago et Fresnel (2) avaient essayé de comparer par le même procédé l'air sec et l'air humide, et ils avaient trouvé que ce dernier est moins réfringent. Jamin reprit cette expérience (3) avec deux tubes de 3^m de longueur; l'un contenait de l'air sec, l'autre de l'air qui s'était chargé d'une quantité connue d'humidité en passant dans des tubes contenant les mélanges d'acide sulfurique et d'eau qui avaient servi à Regnault pour la graduation de l'hygromètre de de Saussure. Toutes les expériences ont donné pour indice normal de la vapeur d'eau, supposée à 0° et à 760^{mm}, le nombre 1,000261. Ce nombre est très peu différent de l'indice de l'air dans les mêmes conditions. Il en résulte que, si l'on compare l'indice de l'air saturé à celui de l'air sec à la température de 20°, on trouve une différence égale à 0,000000720. Elle est trop faible pour qu'on puisse s'en apercevoir et qu'on doive en tenir compte.

Jamin mesura, par le même procédé, l'indice de l'eau, échauffée ou refroidie et de l'eau comprimée. Tous ces résultats ont été cités ci-dessus à propos des indices de réfraction (4).

(1) *Ann. de Chim. et de Phys.*, 3^e série, t. XLIX, p. 282; 1857.

(2) ARAGO, *OEuvres*, t. X, p. 298 et 312.

(3) *Ann. de Chim. et de Phys.*, 3^e série, t. LII, p. 171; 1858.

Noter que la réfractivité de la vapeur d'eau dans le visible est 0,9 fois celle de l'air sec sous les mêmes conditions de T et p ; donc à T et à une pression *totale* fixées, l'augmentation du titre en vapeur d'eau *diminue* légèrement la réfractivité de l'air.

The calculation starts with the dispersion formula of dry air for the new standard conditions, temperature $t = 20^\circ\text{C}$ (ITS-90), pressure $p = 100\,000\text{ Pa}$ and 0.04% CO_2 content, describing the refractivity of standard air dependent on the wavenumber $\sigma = 1/\lambda$, where λ designates wavelength:

$$(n-1)_N \cdot 10^8 = 8091.37 + 2333\,983 / \{130 - (\sigma/\mu\text{m}^{-1})^2\} + 15\,518 / \{38.9 - (\sigma/\mu\text{m}^{-1})^2\}. \quad (6a)$$

A CO_2 content x , differing from 0.04%, changes the refractivity to

$$(n-1)_x = (n-1)_N \cdot \{1 + 0.5327 \cdot (x - 0.0004)\}, \quad (7)$$

The deviation of temperature t and pressure p from the reference conditions is taken into account by

$$(n-1)_{tp} = \frac{(n-1)_x \cdot (p/\text{Pa})}{93\,214.60} \cdot \frac{\{1 + 10^{-8} \cdot (0.5953 - 0.009\,876 \cdot t/^\circ\text{C}) \cdot p/\text{Pa}\}}{1 + 0.003\,6610 \cdot t/^\circ\text{C}}. \quad (8)$$

In the last step, the influence of water vapour with partial pressure f is calculated, which results in the refractive index n_{tpf} for moist air under total pressure p and for temperature t and CO_2 content x :

$$n_{tpf} - n_{tp} = -(f/\text{Pa}) \cdot \{3.8020 - 0.0384 \cdot (\sigma/\mu\text{m}^{-1})^2\} \cdot 10^{-10}. \quad (9a)$$

For the transformation of dew-point temperatures to water-vapour pressure, the equation for the saturation pressure of water p_{sv} given by Giacomo [4] with the updated constants of Davis [5] has been used:

$$p_{sv} = 1\text{ Pa} \cdot \exp(A T^2 + B T + C + D T^{-1}) \quad (10)$$

with

$$A = 1.237\,8847 \times 10^{-5}\text{ K}^{-2}, B = -1.912\,1316 \times 10^{-2}\text{ K}^{-1}, C = 33.937\,110\,47, D = -6.343\,1645 \times 10^3\text{ K}.$$

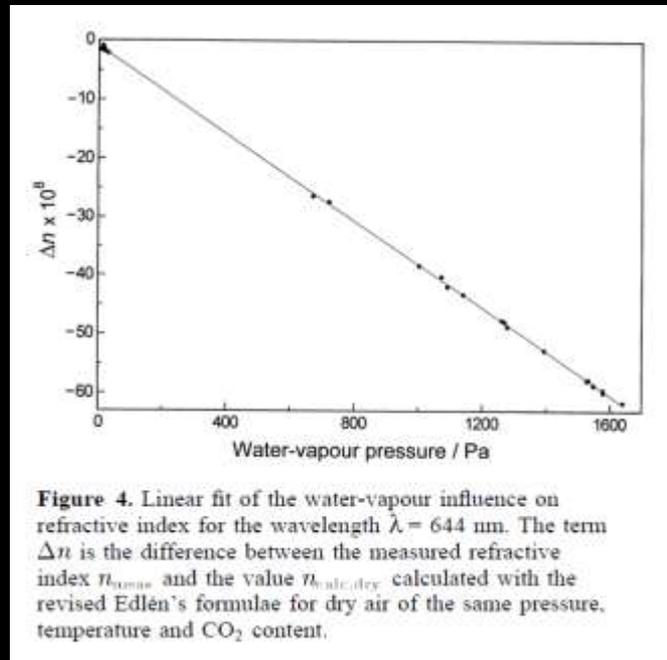
in G. BÖNSCH et E. POTULSKI, « Measurement of the refractive index of air and comparison with modified Edlén's formulae », *Metrologia* **35**, 133-139 (1998)

Des écarts à la loi de GLADSTONE et des gaz parfaits sont pris en compte pour des études précises – voir par exemple l'expression (8) ci-dessus, même si elle est ajustée pour des intervalles de T et p beaucoup plus étroits que ceux observés sur l'ensemble de l'atmosphère.

La relation (9a) montre bien que, dans le visible, la réfractivité de l'air *décroît* en fonction de la pression partielle de vapeur d'eau, à T et à pression *totale* fixées.

Pour atteindre la précision de 0,04 % requise en astrométrie fine, il faut mesurer la température T , la pression totale p et l'humidité relative à 0,1 °C, 0,4 mbar et 0,1 près !

Noter que la concentration moyenne de CO_2 en 2009 était 388 ppmv – d'où, par rapport à 330 ppmv, un accroissement relatif de réfractivité de 0,0031 % dans le visible.



in G. BÖNSCH et E. POTULSKI, « Measurement of the refractive index of air and comparison with modified Edlén's formulae », *Metrologia* **35**, 133-139 (1998)

Leur expression (10) montre que dans le nouvel air normal (donc à 20 °C et 1 bar, avec 400 ppmv de CO_2 – mais la moyenne de 405 ppmv est atteinte dès 2016 !) la pression de vapeur saturante de l'eau est 2 339 Pa ;

alors à une humidité relative de 68,4 % la pression partielle de l'eau est 1 600 Pa ; l'écart de réfractivité de cet air humide par rapport à l'air sec normal (nouveau) est $-6,0 \cdot 10^{-7}$ (cf. fig. *supra*), soit une variation relative de $-0,20$ % ;

la variation de réfraction horizontale est alors $-4''$, et $-0,12''$ à 45° de hauteur ;

effectivement **les variations relevées par DELAMBRE ne sont pas dues à la vapeur d'eau, qui peut être négligée pour les applications usuelles ou anciennes** (cf. BIOT et ss.)
– **mais pas pour l'astrométrie fine actuelle.**

Cas de l'infrarouge lointain et des ondes décimétriques

L'influence de la vapeur d'eau est alors beaucoup plus forte dans l'infrarouge et les ondes décimétriques : à cause de ses nombreuses bandes rovibrationnelles, la vapeur d'eau peut avoir une réfractivité bien plus grande que dans le visible à T et p fixés.



Conséquences

- L'augmentation (du visible aux ondes décimétriques) de réfractivité de la vapeur d'eau donne un accroissement de $|dn/dr|$, mais huit fois plus que le ferait la même augmentation de réfractivité de l'air sec, car la hauteur d'échelle de la vapeur d'eau est huit fois plus petite que celle de l'atmosphère !
- Alors pour les ondes radar – leur longueur d'onde étant de l'ordre de celle de l'importante raie de rotation pure $R(0)$, *i.e.* 1,35 cm – le coefficient de réfraction de l'atmosphère est $k \cong 1/4$ en moyenne (contre 1/5 dans le visible).
- Pour les ondes radar k est aussi plus variable avec la météo, d'où de fréquentes anomalies.

III - LES CLASSIQUES

Thomas SIMPSON, *Mathematical Dissertations on a Variety of Physical and Analytical Subjects*, T. Woodward (London, 1743)

- Trouve la formule (dite de BRADLEY !)

$$\mathcal{R} \cong (n_s - 1) \tan(Z' - 3\mathcal{R})$$

très intéressante pour étudier la non-linéarité de \mathcal{R} par rapport à $n_s - 1$ (le facteur 3 étant pour une atmosphère usuelle).

- Montre que, **sauf à moins de 10° de l'horizon, les valeurs de \mathcal{R} ne dépendent guère du profil de densité** (propriété déjà entrevue par NEWTON et FLAMSTEED).

- Après de l'horizon, compare les résultats prédits par un profil de densité exponentiel et un profil affine, décroissants (comme pour l'atmosphère polytropique avec un coefficient adéquat) ; trouve que ceux du second sont plus proches des observations.

Sa méthode d'estimation numérique des intégrales est beaucoup utilisée pour calculer \mathcal{R} (dans les travaux de BIOT et AUER-STANDISH).



James BRADLEY
(1693-1762),
3^e Royal
Astronomer

I- Les fondateurs

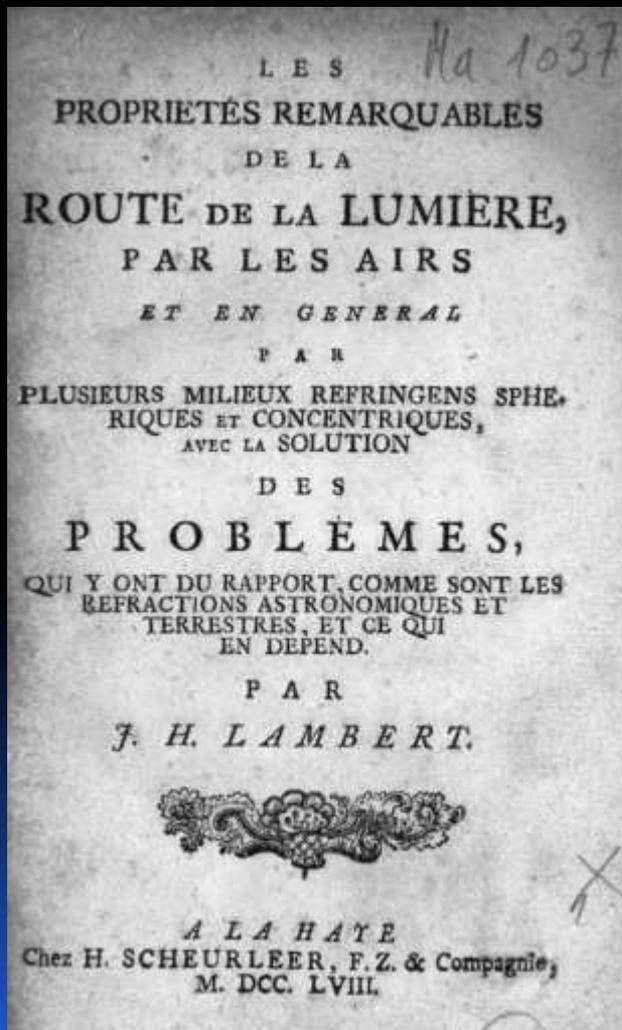
II- Les géodésiens expérimentateurs

III- Les classiques

IV- Les géodésiens métrologistes

V- Les continuateurs et les ouvreurs

J. H. LAMBERT, *Les propriétés remarquables de la route de la lumière*, H. Scheurleer F. Z. & Compagnie (La Haye, 1758)



Johann Heinrich LAMBERT (1728-1777)



SECTION II.

Des Refractions Astronomiques, de la manière de les déterminer par approximation aussi exactement que l'on voudra, & de leur rapport à divers autres Problèmes.

EXPOSITION DU CAS.

§. 69. **I**L ne s'agit ici que d'appliquer la 3^e. figure à notre terre & à son atmosphère. Soit donc C son centre & celui des couches de l'air: CA le demi-diamètre, le cercle tiré par A sa surface, BM une couche de l'air, bn une autre, qui lui est infiniment proche; nMA un rayon de lumière qui y passe, & qui tombe en A: AJ sa touchante en A, & JAB sa distance apparente du Zenith. Ceci posé, les autres lignes ont la même signification & dénomination, que nous leur avons données ci-dessus (§. 30. 58.) Ainsi l'angle TGA sera la refraction que la lumière souffre en parcourant la partie MA de sa route par l'air, & si AM est la route entière, cet angle sera la refraction totale.

• Trouve $\mathcal{R} \cong (n_s - 1) \tan Z'$

• Est le premier à utiliser la série binomiale $(1 + x)^m$ pour évaluer l'intégrale donnant \mathcal{R} :

PROBLÈME II.

§. 76. *Exprimer les refractions par une suite.*

SOLUTION.

• Fait entrevoir la différence de vitesse de convergence de deux séries pour \mathcal{R} .

B. ORIANI, « De refractionibus astronomicis », *Ephemerides astronomicae anni 1788 : Appendix ad ephemerides Anni 1788*, Appresso Giuseppe Galeazzi (Milano, 1787), pp. 164–277.



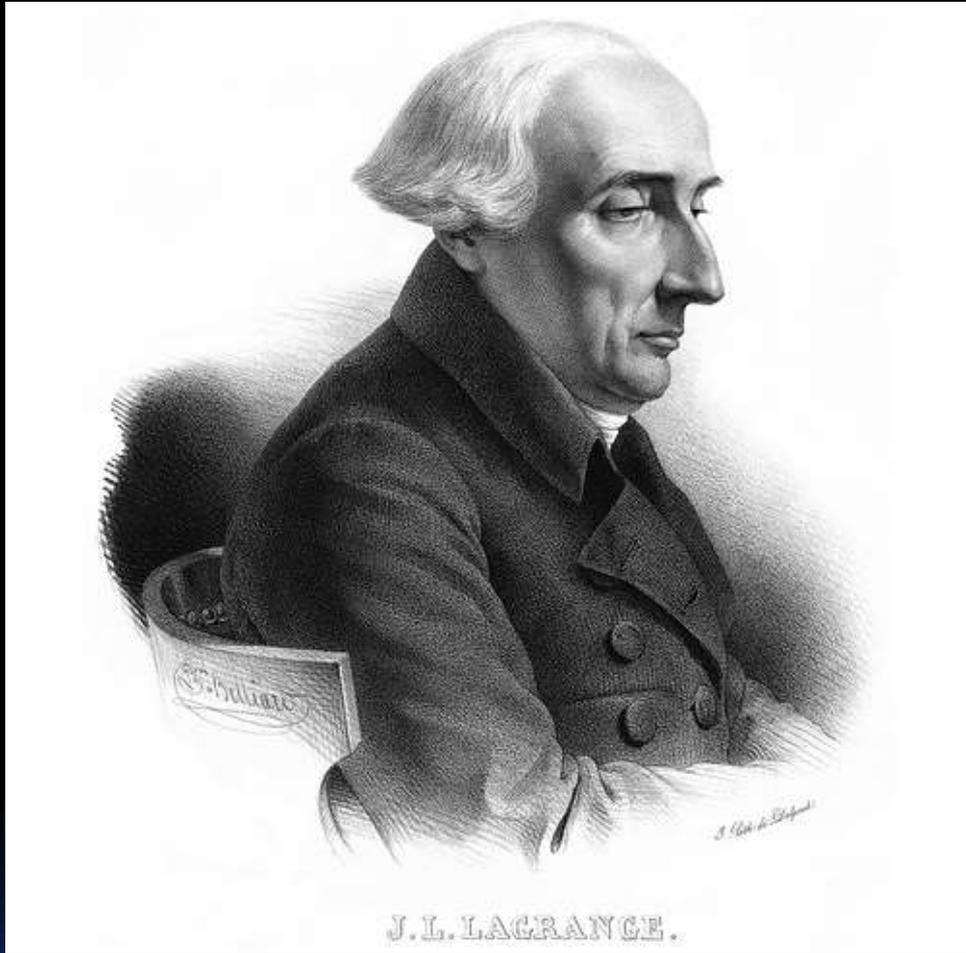
Barnaba ORIANI
(1752-1832)
astronome
à Milan



Dans une atmosphère à symétrie sphérique, les coefficients du développement de \mathcal{R} à l'ordre 3 en $\tan Z'$ ne varient essentiellement qu'avec l'indice au niveau de l'observateur et la hauteur réduite de l'atmosphère. Ce résultat précise la loi de SIMPSON, et la possibilité de connaître facilement \mathcal{R} avec une précision suffisante jusqu'à $Z' \cong 70^\circ$.

Christian KRAMP, *Analyse des Réfractions Astronomiques et Terrestres*, Dannbach (Strasbourg, an VII) – et Schwikkert (Leipsic, 1799)

- **Invente la fonction *Gamma***, pour donner une approximation de la réfraction horizontale dans le cas d'un profil de densité exponentiel (ce qui est déjà une approximation pour KRAMP).
- Montre que ce profil est celui utilisé par NEWTON pour calculer sa nouvelle table de 1695 (avec une hauteur d'échelle de 4 377 toises).
- Il **prouve et utilise $\Gamma^2(1/2) = \pi$** ; il jubile de cette trouvaille qu'EULER n'a pas réalisée !
- Il **approxime \mathcal{R} au voisinage de l'horizon par la fonction d'erreur** (qu'il tabule) – technique très différente de celle utilisée assez loin de l'horizon !
Comme pour NEWTON, **l'excès systématique, dans les variations de ses valeurs de la réfraction au voisinage de l'horizon, est dû au gradient de température troposphérique, qu'il ignore** (depuis on sait qu'il change entre le jour et **la nuit dans la couche limite** – car **le refroidissement du sol établit usuellement une inversion de température valant 5 à 15 K sur 100 à 500 m, qui, par changement de profil de réfractivité juste au-dessus de l'observateur, augmente la réfraction horizontale de 10' facilement**, beaucoup plus que l'augmentation relative de $n_s - 1$) ; KRAMP avait tenté d'expliquer le biais de la table de BOUGUER, sans succès.
- Trouve comme BOUGUER qu'un rayon pourrait faire le tour de la Terre si la hauteur d'échelle de l'atmosphère était de 1880 toises ; il ajoute que « *souvent nous en aurions dans nos climats, si les vapeurs dont l'air est chargé, ne nous empêchoient pas alors de discerner les objets éloignés.* »



[J.-L.] LA GRANGE,
« Sur les réfractions
astronomiques »,
*Nouveaux Mémoires
de l'Académie Royale
des Sciences et Belles-
Lettres (Berlin), Année
MDCCLXXII [1772]*
259–282 (1774)

Joseph Louis LAGRANGE (1736-1813)

Donne une expression rigoureuse de \mathcal{R} dans le cas d'une atmosphère limitée où n décroît en r^{-q} avec $q \neq 1$ (hypothèse de BOUGUER).



P. S. LAPLACE, *Traité de Mécanique Celeste* – tome 4, livre 10, J. B. M. Duprat (Paris, 1805)

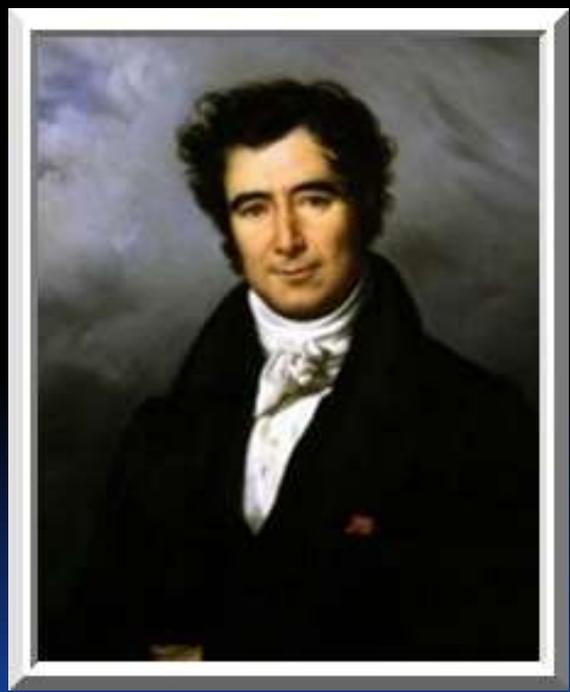
Au chapitre 1 il traite de la réfraction, dans le cadre mécaniste de la théorie corpusculaire ; il relie l'invariant I de BOUGUER à la constante des aires pour le mouvement à force centrale des « *molécules de lumière* ».

Au chapitre 3 il **montre le lien avec l'extinction** : la *masse d'air* est quasi proportionnelle à $\mathcal{R} / \sin Z'$ dans une atmosphère isotherme.

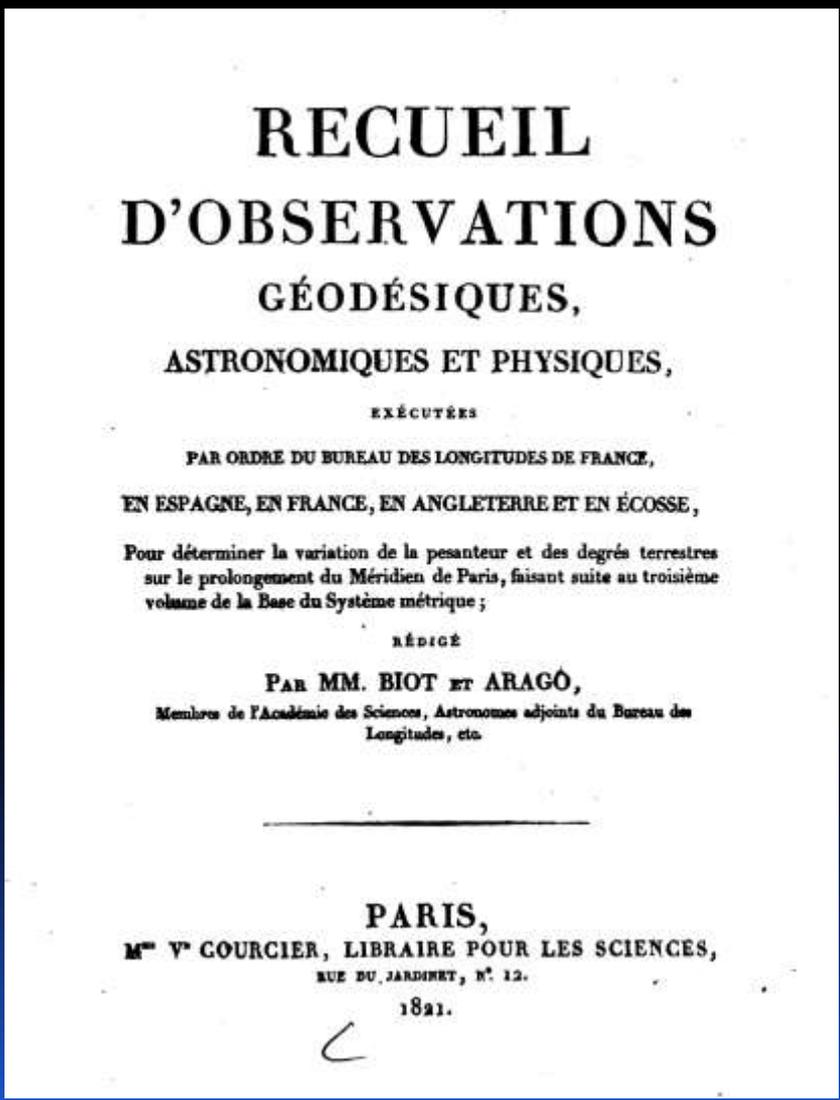
Pierre Simon
DE LAPLACE
(1749-1827)

IV - LES GÉODÉSIENS MÉTROLOGISTES

Afin d'affiner la connaissance du mètre, campagne géodésique de 1806-1808 prolongeant jusqu'aux Baléares la mesure du méridien faite par MÉCHAIN jusqu'à Barcelone – où en 1794 il constata 3,2" d'écart entre ses mesures d'une latitude...



François ARAGO (1786-1853)
A vu que le cercle répétiteur de MÉCHAIN avait une erreur systématique.



RECUEIL D'OBSERVATIONS GÉODÉSIQUES,

ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES,

EXÉCUTÉS

PAR ORDRE DU BUREAU DES LONGITUDES DE FRANCE,

EN ESPAGNE, EN FRANCE, EN ANGLETERRE ET EN ÉCOSSE,

Pour déterminer la variation de la pesanteur et des degrés terrestres sur le prolongement du Méridien de Paris, faisant suite au troisième volume de la Base du Système métrique ;

RÉDIGÉ

PAR MM. BIOT ET ARAGÓ,

Membres de l'Académie des Sciences, Astronomes adjoints du Bureau des Longitudes, etc.

PARIS,

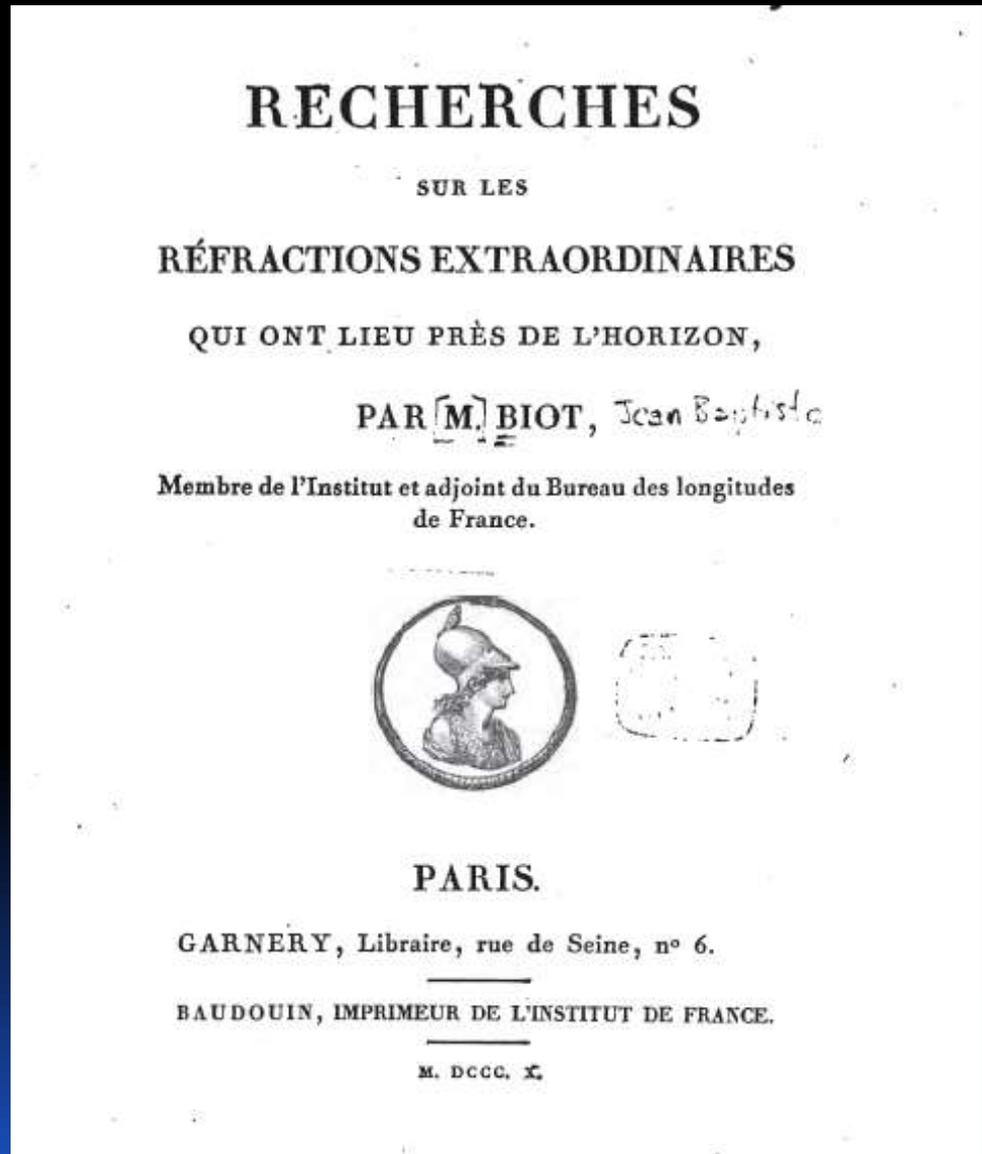
M^{me} V^e GOURCIER, LIBRAIRE POUR LES SCIENCES,
RUE DU JARDINET, N^o 12.

1821.

Jean-Baptiste BIOT (1774-1862)



A une connaissance théorique et pratique très approfondie des réfractions astronomiques et terrestres, à cause de sa relecture de LAPLACE et de son expédition de 1806-1808 avec ARAGO. Vers 1812-1828 l'amélioration des tables de réfraction, entre autres, a permis de réduire au niveau des incertitudes (0,2") la triste erreur de 3,2" de MÉCHAIN.



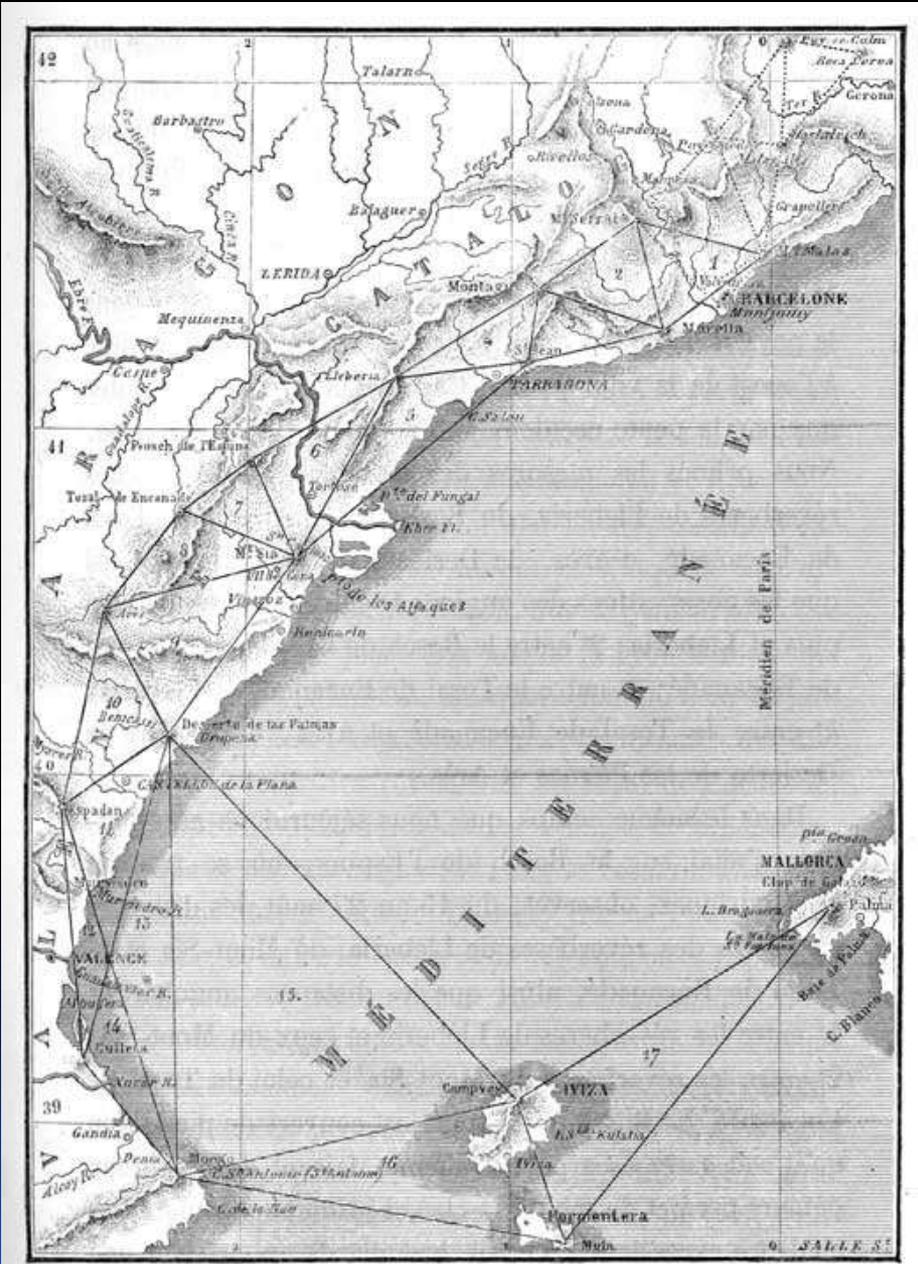
I- Les fondateurs

II- Les géodésiens expérimentateurs

III- Les classiques

IV- Les géodésiens métrologistes

V- Les continuateurs et les ouvreurs



Cercle répétiteur de FORTIN, modèle BORDA (1784).
 Gradué au 10^e de grade, a des verniers au 40^e, et procure par répétition des pointés une précision comparable à celle donnée par un grand cercle (0,1").
 DELAMBRE et MÉCHAIN utilisaient des cercles de LE NOIR, avec une optique de LEREBOURS (précision 1", donc 15 fois mieux que les instruments antérieurs).

Triangles de l'expédition de BIOT et ARAGO

J.-B. BIOT, « Sur les réfractions astronomiques », *C. R. Acad. Sci.* **3**, 237–244 (1836)

COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 5 SEPTEMBRE 1836.

VICE-PRÉSIDENTE DE M. MAGENDIE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

OPTIQUE MATHÉMATIQUE. — *Sur les réfractions astronomiques*; par M. BIOT.

« Le calcul des réfractions astronomiques repose sur la connaissance du pouvoir réfringent de l'air atmosphérique dans ses états divers de composition, de densité, de température; et sur la représentation plus ou moins approchée des lois suivant lesquelles ces trois éléments varient dans l'atmosphère à mesure que l'on s'élève dans les couches aériennes superposées. Newton put le premier entreprendre de lier mathématiquement ces deux classes de données physiques, au moyen de sa théorie féconde des forces centrales; et il en déduisit les valeurs numériques des réfractions pour le cas d'une température uniforme, en se servant de sa méthode des quadratures approximatives, dont on a long-temps ignoré qu'il eût fait cet usage, et dont l'utilité, pour ce genre de problème, n'a pas été jusqu'à ce jour appréciée suffisamment. A mesure que les procédés du calcul infinitésimal se développèrent, plusieurs des grands géomètres qui l'avaient occupé s'occupèrent du problème des réfractions; mais ils semblèrent plu-

Grandissement angulaire local vertical sur l'horizon :

$$\begin{aligned}\gamma_0 &:= (d\psi' / d\psi)_0 = 1 + (d\mathcal{R} / d\psi)_0 \\ &= 1 - k = 1 + (R_S / n_S) (dn / dr)_S\end{aligned}$$

où ψ est la hauteur réelle de l'astre.

« coefficient varié de la réfraction » :
 $- d\mathcal{R} / d\psi' = k / (1 - k)$

« Outre la singularité inattendue de trouver un élément de la réfraction horizontale, indépendant de l'état des couches lointaines, et s'obtenant, dans tous les cas possibles, sans intégration ; outre la liaison qui en résulte entre l'accroissement de la réfraction près de l'horizon et les variations également observables du pouvoir réfringent à partir de la couche inférieure, le théorème que je viens d'énoncer aura encore d'autres applications utiles. »

I- Les fondateurs

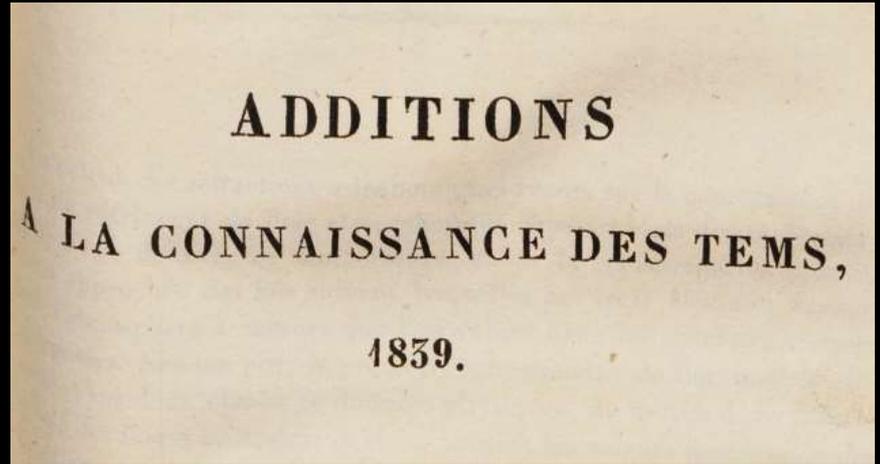
II- Les géodésiens expérimentateurs

III- Les classiques

IV- Les géodésiens métrologistes

V- Les continuateurs et les ouvreurs

J.-B. BIOT, « Sur les réfractions astronomiques », *Additions à la Connaissance des Temps* 1839, 3-114 (1836)



TABLES DE RÉFRACTIONS. Ces Tables sont extraites de celles qui ont été publiées par le Bureau des Longitudes. Elles ont été calculées d'après la formule de Laplace (Mécanique céleste, tome IV, page 271), par MM. Bouvard et Arago. Delambre a déduit la constante d'un grand nombre d'observations de Piazzi et de plusieurs centaines de hauteurs du Soleil, qu'il avait observées à Bourges depuis 70° jusqu'à 90° 20' de distance au zénith; la valeur de cette constante s'accorde avec le résultat des expériences de MM. Biot et Arago, sur le pouvoir réfringent de l'air. La première Table donne les réfractions moyennes, dont les navigateurs peuvent se contenter; mais pour les cas qui demanderaient une plus grande précision, on a donné dans la seconde table les facteurs par lesquels on doit multiplier la réfraction moyenne, pour la réduire à celle qui répond à la pression barométrique et à la température de l'air au moment de l'observation. Pour abréger l'opération, on multipliera, l'un par l'autre, les deux facteurs, et le produit servira ensuite de multiplicateur pour la réfraction moyenne.

Exemple. Hauteur observée 3° 45' 18" = 3° 45' 3."		Table II.	
Pour 3° 40' Table I.....	12' 35"6	avec Baromètre 0m741	Facteur... 0.975
5.....	— 12,15	Therm... + 9,25	Facteur... 1.003
0,3	— 0,73		0.975
réfraction moyenne.....	12' 22,72 = 742"72		3
Pour — 0.02.....	— 14,85		Produit + 0.978
— 0.002.....	— 1,48		ou 1 — 0.022
réfraction corrigée.....	12. 6,39		
Exemple. Méchain observa la même étoile à 3° 44' 40".		Table II.	
Pour 3° 40' Table I.....	12' 35"6	Baromètre 0.766...	1.008
4'.....	— 9,72	Therm... + 8.125...	1.007
40" = 2/3.....	— 1,62		8
réfraction moyenne.....	12. 24,26 = 744"26		Produit des facteurs. 1.015
Pour + 0.01.....	+ 2,44		
+ 0.005.....	+ 3,72		
réfraction corrigée.....	12' 35"4 755.42		

Donne un **changement de variable** transformant l'intégrale impropre de la réfraction – avec $n(r)$ quasiment quelconque – en une intégrale ordinaire. BIOT l'a estimée numériquement selon la méthode de SIMPSON avec une douzaine de points, et a obtenu un résultat à 0,1 % de celui de LAPLACE. Mais cette technique astucieuse n'a guère suscité d'écho au XIX^e ; elle a été redécouverte par AUER et STANDISH en 1979 ! C'est actuellement la méthode standard, recommandée par la dernière édition du *Explanatory supplement to the Astronomical Almanac* (1992). Elle **fonctionne bien aussi pour la réfraction horizontale**.

V - LES CONTINUATEURS...

James IVORY, « On the astronomical refractions »,
Phil. Trans. Roy. Soc. 409–495 (1823)

- A une attitude contradictoire quant aux variations de réfraction horizontale : ses calculs montrent que la structure de la haute atmosphère influe peu, mais il déclare le contraire par ailleurs – comme s’il avait du mal à les croire !
- Est **le premier à montrer que les développements sont seulement** des développements limités pour une distance zénithale au voisinage de 0, mais que ce ne sont pas des séries convergentes – on dit dans ce cas que les développements sont **semi-convergen**ts.
Par chance leur divergence est lente, et ils ont quand même pu fournir des tables numériques d’assez bonne qualité pour une distance zénithale allant de 0° à 82°.

Séries semi-convergentes

Cet avertissement resta en général ignoré, même par NEWCOMB, et valut à IVORY une controverse de 1821 à 1825 avec un Thomas YOUNG sarcastique ; les premiers qui retrouvèrent sérieusement cette idée furent OPPOLZER en 1887 puis BRUNS en 1891.

IVORY était trop en avance sur ses collègues ! La notion de semi-convergence était nouvelle (et peu familière aux astronomes) : elle serait due à LEGENDRE, *Exercices de Calcul Intégral, sur divers ordres de Transcendantes et sur les quadratures*, Courcier (Paris, 1811-1817), où il discute (pp. 267 et 294) des séries « *demi-convergentes* » dont le terme général décroît en valeur absolue (« *converge* ») puis croît (« *diverge* »).

Les séries semi-convergentes forment un sous-ensemble des *séries asymptotiques* au sens de POINCARÉ.



TABLE I.

Mean Refractions for the Temperature of 50° of FAHRENHEIT, and the Barometric Pressure 30 inches.

Distance from Zenith.	$\delta \theta$	Log. $\delta \theta$	Difference.	Distance from Zenith.	$\delta \theta$	Log. $\delta \theta$	Difference.
0	0			30	33.72	1.5279	173
1	1.02	0.0085	3012	31	35.09	1.5452	170
2	2.04	0.3097	1763	32	36.49	1.5622	168
3	3.06	0.4860	1252	33	37.93	1.5790	164
4	4.08	0.6112	974	34	39.39	1.5954	162
5	5.11	0.7086	796	35	40.89	1.6116	160
6	6.14	0.7882	675	36	42.42	1.6276	159
7	7.17	0.8557	587	37	44.00	1.6435	156
8	8.21	0.9144	519	38	45.61	1.6591	155
9	9.25	0.9663	466	39	47.27	1.6746	155
10	10.30	1.0129	424	40	48.99	1.6901	154
11	11.35	1.0553	388	41	50.75	1.7055	152
12	12.42	1.0941	359	42	52.57	1.7207	151
13	13.49	1.1300	334	43	54.43	1.7358	152
14	14.56	1.1634	313	44	56.35	1.7510	151
15	15.66	1.1947	294	45	58.36	1.76611	1512
16	16.75	1.2241	278	46	1 0.43	1.78123	1514
17	17.86	1.2519	265	47	2.57	1.79637	1518
18	18.98	1.2784	252	48	4.80	1.81155	1523
19	20.11	1.3036	241	49	7.11	1.82678	1530
20	21.26	1.3277	230	50	9.52	1.84208	1539
21	22.42	1.3507	222	51	12.02	1.85747	1551
22	23.60	1.3729	215	52	14.64	1.87298	1565
23	24.80	1.3944	207	53	17.38	1.88863	1577
24	26.01	1.4151	201	54	20.24	1.90440	1596
25	27.24	1.4352	195	55	23.25	1.92036	1617
26	28.49	1.4547	189	56	26.41	1.93653	1638
27	29.76	1.4736	185	57	29.73	1.95291	1664
28	31.05	1.4921	181	58	33.23	1.96955	1691
29	32.38	1.5102	177	59	36.93	1.98646	1722
30	33.72	1.5279		60	40.85	2.00368	

TABLE I. continued.

Distance from Zenith.	$\delta \theta$	Log. $\delta \theta$	Difference.	Distance from Zenith.	$\delta \theta$	Log. $\delta \theta$	Difference.	$\frac{d\delta\theta}{d\tau}$
60	1 40.85	2.00368	1756	74	00 3 20.01	2.30322	467	
61	45.01	2.02124	1794	10	23.18	2.30789	470	
62	49.44	2.03918	1836	20	25.39	2.31259	475	
63	54.17	2.05754	1881	30	27.66	2.31734	479	
64	59.22	2.07635	1932	40	29.95	2.32213	483	
65	2 4.65	2.09567	1988	50	32.30	2.32696	488	
66	10.48	2.11555	2048	75	00 34.70	2.33184	493	0.009
67	16.78	2.13603	2116	10	37.16	2.33677	497	
68	23.61	2.15719	2191	20	39.65	2.34174	502	
69	31.04	2.17910	2275	30	42.21	2.34676	507	
70	00 39.16	2.20185	388	40	44.82	2.35183	512	
10	40.59	2.20573	390	50	47.48	2.35695	517	
20	42.04	2.20963	393	76	00 50.21	2.36212	523	0.012
30	43.52	2.21356	396	10	53.00	2.36735	528	
40	45.02	2.21752	398	20	55.85	2.37263	533	
50	46.53	2.22150	402	30	58.76	2.37796	538	
71	00 48.08	2.22552	404	40	4 1.74	2.38334	545	
10	49.65	2.22956	407	50	4.79	2.38879	551	
20	51.25	2.23363	410	77	00 7.91	2.39430	557	0.015
30	52.87	2.23773	413	10	11.11	2.39987	563	
40	54.53	2.24186	417	20	14.39	2.40550	569	
50	56.21	2.24603	419	30	17.74	2.41119	576	
72	00 57.92	2.25022	423	40	21.19	2.41695	583	
10	59.66	2.25445	425	50	24.72	2.42278	589	
20	1.43	2.25870	429	78	00 28.31	2.42867	596	0.018
30	3.23	2.26299	433	10	32.04	2.43463	603	
40	5.06	2.26732	436	20	35.84	2.44066	611	
50	6.93	2.27168	440	30	39.75	2.44677	618	
73	00 8.83	2.27608	443	40	43.70	2.45295	626	
10	10.77	2.28051	447	50	47.88	2.45921	635	
20	12.74	2.28498	450	79	00 52.12	2.46556	642	0.023
30	14.75	2.28948	454	10	56.47	2.47198	650	
40	16.80	2.29402	458	20	5 0.94	2.47848	659	0.026
50	18.88	2.29860	462	30	5.54	2.48507	669	
74	00 21.01	2.30322		40	10.28	2.49176	677	
				50	15.16	2.49853	688	
				80	00 20.19	2.50541		0.030

TABLE I. continued.

Distance from Zenith.	$\delta\theta$	Log. $\delta\theta$	Diff.	$\frac{d\delta\theta}{d\tau}$	$\frac{d\delta\theta}{dp}$	Distance from Zenith.	$\delta\theta$	Log. $\delta\theta$	Diff.	$\frac{d\delta\theta}{d\tau}$	$\frac{d\delta\theta}{dp}$
80 00	5 20.19	2.50541	696	0.030	0.04	85 00	9 53.84	2.77367	1191	0.159	0.25
10	25.36	2.51237	707	0.031		10 10	10.35	2.78558	1219	0.171	0.26
20	30.70	2.51944	716	0.034		20	27.73	2.79777	1248	0.184	0.28
30	36.20	2.52660	727	0.034		30	46.03	2.81025	1277	0.198	0.31
40	41.88	2.53387	738	0.036		40 11	5.30	2.82302	1309	0.213	0.33
50	47.74	2.54125	749	0.038		50	25.66	2.83611	1340	0.229	0.36
81 00	53.79	2.54874	759	0.040	0.05	86 00	47.15	2.84951	1374	0.248	0.39
10	6 0.04	2.55635	772	0.042		10 12	9.88	2.86325	1410	0.269	0.43
20	6.50	2.56407	785	0.044	0.07	20	33.97	2.87735	1447	0.292	0.47
30	13.18	2.57192	797	0.046		30	59.51	2.89182	1484	0.317	0.51
40	20.09	2.57989	811	0.049		40 13	26.61	2.90666	1523	0.345	0.56
50	27.26	2.58800	824	0.051		50	55.40	2.92189	1565	0.376	0.62
82 00	34.68	2.59624	838	0.053	0.08	87 00	14 26.04	2.93754	1608	0.410	0.68
10	42.37	2.60462	851	0.057		10	58.71	2.95362	1654	0.448	0.75
20	50.33	2.61313	866	0.060	0.10	20 15	33.60	2.97016	1701	0.490	0.83
30	58.59	2.62179	883	0.063		30 16	10.89	2.98717	1749	0.538	0.91
40	7 7.19	2.63062	899	0.067		40	50.8	3.00466	1801	0.593	1.01
50	16.13	2.63961	914	0.071		50 17	33.6	3.02267	1855	0.654	1.13
83 00	25.40	2.64875	931	0.074	0.11	88 00	18 19.6	3.04122	1909	0.722	1.26
10	35.05	2.65806	949	0.079		10 19	9.0	3.06031	1967	0.799	1.41
20	45.10	2.66755	967	0.084	0.13	20 20	2.2	3.07998	2026	0.887	1.59
30	55.58	2.67722	986	0.089		30	59.6	3.10024	2089	0.987	1.79
40	8 6.50	2.68708	1006	0.095		40 22	1.7	3.12113	2155	1.101	2.02
50	17.90	2.69714	1026	0.101		50 23	8.9	3.14268	2221	1.231	2.29
84 00	29.80	2.70740	1047	0.107	0.16	89 00	24 21.8	3.16489	2290	1.380	2.61
10	42.24	2.71787	1069	0.114		10 25	40.9	3.18779	2361	1.551	2.98
20	55.25	2.72856	1092	0.122	0.20	20 27	7.1	3.11140	2434	1.749	3.41
30	9 8.88	2.73948	1115	0.130		30 28	40.8	3.23574	2509	1.977	3.93
40	23.16	2.75063	1139	0.139		40 30	23.2	3.26083	2584	2.241	4.54
50	38.12	2.76202	1165	0.149		50 32	15.0	3.28667	2667	2.549	5.26
85 00	53.84	2.77367		0.159	0.25	90 00	34 17.5	3.31334		2.909	6.12

CALCUL DE LA RÉFRACTION MOYENNE.

221

qui contiennent f donnent $0''$, 12. La réfraction est donc $-315''$, 20, valeur voisine de celle donnée par Bessel. Cet accord a lieu encore jusqu'à $z = 86^\circ$ environ, et les réfractions calculées représentent bien les réfractions observées. Près de l'horizon, les valeurs déduites des formules de Bessel sont trop grandes, et les valeurs calculées par la formule d'Ivory sont trop petites; pour d'aussi grandes distances zénithales, il vaut donc mieux, comme l'a fait Bessel, déduire des observations mêmes les valeurs des réfractions et construire des Tables spéciales; en effet, pour la réfraction horizontale,

$$\psi(r) = \int_0^r e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

on aurait donc par la formule de Bessel

$$\delta z_0 = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sqrt{\frac{\beta\pi}{2}} \left[e^{-\alpha\beta} + 2^{\frac{1}{2}} \alpha\beta e^{-2\alpha\beta} + 3^{\frac{3}{2}} \frac{\alpha^2 \beta^2}{1.2} e^{-3\alpha\beta} + \dots \right];$$

d'un autre côté, à l'horizon, on déduit de celle d'Ivory

$$\delta z_0 = \frac{\alpha}{1-\alpha} \sqrt{\frac{\beta\pi}{2}} \left[1 + \alpha\beta(\sqrt{2}-1) - f(2\sqrt{2}-\frac{1}{2}) \right];$$

réduites en nombres ces formules donnent : la première $36' 5''$, la seconde $33' 58''$, et l'observation $34' 50''$, à peu près la moyenne des deux.

Version contemporaine

en ligne à

<http://wise-obs.tau.ac.il/~eran/Wise/Util/Refraction.html>

Refraction

While the light from celestial object is passes through the Earth atmosphere it is refracted by the air, the refraction depends on the light path distance, temperature, atmospheric pressure, etc. The net change of the refraction is to lower the apparent [altitude](#) of the celestial objects (relative to its geometric position).

The refraction of an object observed at the zenith is 0, while the refraction of an object observed near the horizon is about 34 arcmin.

Refraction correction formulae

approximate formulae for **refraction correction** for objects with zenith distance of up to 75° ([altitude](#) > 15°) :

$$R = 0^{\circ}.00452 P / ((273 + T) \tan a)$$

and for object below [altitude](#) of 15°:

$$R = P (0.1594 + 0.0196a + 0.00002a^2) / [(273+T)(1 + 0.505a + 0.0845a^2)]$$

Where P is the barometric pressure in millibars, T is the temperature in °C, a is the [altitude](#) measured in degrees and R is thr amount of refraction measured in degrees.

Refraction calculator

[Altitude](#)

Temperature

Pressure

Calculate Refraction

Reload

Refraction arcmin.



Rodolphe RADAU,
 « Recherches sur la
 théorie des réfractions
 astronomiques »,
*Annales de
 l'Observatoire de Paris*
16, B.1–B.114 (1882)

Mémoire primé par
 l'Académie des Sciences
 (*idem* pour sa suite de 1889)

D'abord astronome à Königsberg, RADAU accompagne à Paris Antoine D'ABBADIE qui l'embauche pour réduire les calculs de son expédition en Abyssinie. RADAU devient rédacteur de la *Revue des deux Mondes* ; il est naturalisé français en 1873, collabore avec TISSERAND sur des questions de mécanique céleste, et devient académicien des sciences en 1897.

RECHERCHES
sur la
 THÉORIE DES RÉFRACTIONS ASTRONOMIQUES;
 PAR M. R. RADAU.

En comparant entre elles les Tables de réfractions en usage parmi les astronomes, on constate qu'elles sont sensiblement d'accord pour les distances zénithales qui n'excèdent pas 80°, c'est-à-dire pour toute la région du ciel où se font habituellement les observations; et, malgré la dissemblance des théories qui ont servi de base à ces Tables, les petites différences qui subsistent encore ne sont guère dues qu'à la diversité des valeurs adoptées pour la constante qui dépend de l'indice de réfraction de l'air. C'est que, fort heureusement, dans ces limites, la loi suivant laquelle on fait décroître la densité des couches atmosphériques a très peu d'influence sur le résultat. Il n'en est plus de même pour les réfractions qui s'opèrent plus près de l'horizon. Les valeurs de la réfraction horizontale moyenne qui se déduisent des diverses théories diffèrent de plusieurs minutes, et les mêmes écarts se présentent lorsque l'on compare ces théories aux observations faites dans le voisinage de l'horizon.

Ce désaccord prouve que, pour le calcul des réfractions un peu fortes, il ne suffit point de connaître la température et la pression atmosphérique au lieu où se fait l'observation. Il faudra évidemment introduire dans les Tables un autre élément qui permette de tenir compte du décroissement plus ou moins rapide des densités. Les tentatives qui ont été faites dans ce sens ne m'ayant pas paru complètement satisfaisantes, j'ai pensé qu'il y avait intérêt à reprendre le problème et à examiner aussi l'influence d'un dénivèlement des couches atmosphériques. Mais, avant d'exposer mes propres résultats, il ne sera pas inutile de présenter un résumé critique des théories de la réfraction qui se sont produites jusqu'à ce jour.

Il part de l'intégrale bien connue (LAMBERT 1758)

$$\mathcal{R} = \int_1^{n_s} (\tan \theta) dn/n$$

(1) (présentant l'avantage de ne pas avoir de borne infinie)

qu'il transforme en

$$\mathcal{R} = \int_1^{n_s} \frac{n r \sin \theta}{\sqrt{n^2 r^2 - (n r \sin \theta)^2}} \frac{dn}{n}$$

(2) où apparaît l'invariant de BOUGUER

$$n r \sin \theta = n_s R_s \sin Z'$$

(l'indice s désignant les valeurs au niveau de l'observateur), ce qui donne

$$\mathcal{R} = n_s R_s (\sin Z') \int_1^{n_s} \frac{n^{-1}}{\sqrt{n^2 r^2 - (n_s R_s \sin Z')^2}} dn = n_s R_s (\sin Z') \int_1^{n_s} \frac{n^{-1}}{n r \cos Z'} \left[\frac{1}{\cos^2 Z'} - \frac{n_s^2 R_s^2}{n^2 r^2} \tan^2 Z' \right]^{-1/2} dn$$

D'où les expressions utiles

$$f(n, Z') := \left(1 - \frac{n_s^2 R_s^2}{n^2 r^2} \right) \tan^2 Z'$$

et

$$\mathcal{R} = n_s R_s (\tan Z') \int_1^{n_s} n^{-2} r^{-1} [1 + f(n, Z')]^{-1/2} dn \quad (3)$$

dont il développe en série le crochet (sans se soucier de la convergence !), ce qui conduit à admettre

$$\mathcal{R} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p a_p \tan^{2p+1} Z' \quad (4)$$

avec

$$a_p = n_s R_s \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \int_1^{n_s} n^{-2} r^{-1} \left(1 - \frac{n_s^2 R_s^2}{n^2 r^2} \right)^p dn$$

Ensuite, il calcule les coefficients a_p en utilisant diverses approximations (dont d'autres développements en série occultant la physique du phénomène !).

$$\text{D'abord } n_s^{-1} \int_1^{n_s} (R_s/r) dn < a_0 = n_s R_s \int_1^{n_s} n^{-2} r^{-1} dn < n_s \int_1^{n_s} (R_s/r) dn$$

mais la loi de GLADSTONE donne $n - 1 = (n_s - 1) \mu / \mu_s$ où μ désigne masse volumique de l'air, donc

$$\int_1^{n_s} \frac{R_s}{r} dn = \frac{n_s - 1}{\mu_s} \int_0^{\mu_s} \frac{R_s}{r} d\mu = \frac{n_s - 1}{\mu_s} \left\{ \left[\frac{R_s}{r(\mu)} \mu \right]_0^{\mu_s} - \int_0^{\mu_s} -\frac{R_s}{r^2} \mu(r) dr \right\} \approx \frac{n_s - 1}{\mu_s} \left\{ \mu_s - \int_{R_s}^{\infty} \frac{1}{R_s} \mu(r) dr \right\}$$

car r est très proche de R_s tant que $\mu(r)$ n'est pas négligeable. En introduisant l'altitude $z := r - R_s$

il vient $\int_{R_s}^{\infty} \mu(r) dr = \int_0^{\infty} \mu(z) dz := \mu_s H$ où H est par définition la **hauteur réduite** (de l'atmosphère).

N. B. : une intégration par parties montre que H est aussi le **moment d'ordre 1** de $-\mu'(z)$.

Finalement $a_0 \cong (n_s - 1) [1 - (H/R_s)]$, d'où le **premier terme de la formule de LAPLACE**.

Avec cette formule, en l'appliquant au cas du modèle de CASSINI, on retrouve une propriété identique à celle que BOUGUER a prise en défaut : quand l'observateur s'élève, n_s restant constant mais H diminuant dans ce modèle, \mathcal{R} augmenterait un tout petit peu...

Puis, avec une hypothèse qui ressemble à celle de l'atmosphère isotherme (de hauteur d'échelle H)

où $n_s - 1 \ll H/R_s$, pour $p \geq 1$ il trouve $a_p \cong (2p-1)!! (n_s - 1)(H/R_s)^p$ (5) – cf. infra.

Il dit que ces expressions approchées, mises dans $\mathcal{R} \cong \sum_{p=0}^3 (-1)^p a_p \tan^{2p+1} Z'$ (6)

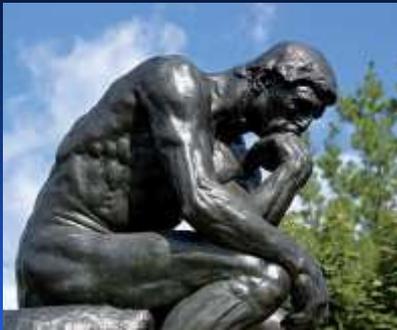
donnent une excellente approximation jusqu'à $Z' = 80^\circ$, mais que pour $Z' = \arctan 10 \cong 84,3^\circ$ « la série diverge à partir » de $p = 5$ – tel que $a_5 \tan^{11} Z' \cong 10''$ (cf. p. 15 / 114).

Remarques

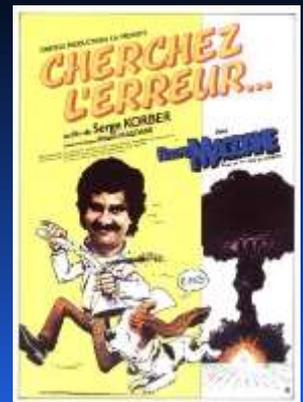
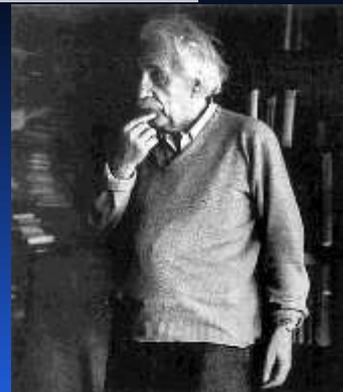
L'approximation obtenue avec $p = 0$ et 1 (soit quasiment la formule de LAPLACE) est bien moins bonne que celle de CASSINI, à toute distance zénithale !

RADAU ne dit jamais explicitement (ni en 1889) que la série approchée obtenue finalement

pour $\mathcal{R}(\tan Z')$ est semi-convergente, ni que $\lim_{p \rightarrow \infty} a_p \tan^{2p+1} Z' = \infty$ aussi petits que soient H et même $\tan Z'$ (non nuls) !



**Comment
en est-on
arrivé là ?**



L'expression (1) exige l'existence de la fonction $r(n)$ strictement monotone par définition (ce qui restreint physiquement la généralité de l'étude) ; l'image de $]1, n_S]$ par r exclut donc les intervalles de r où n serait uniforme.

Pour tan Z' assez petit, $\sup_{n \in [1, n_S]} |f(n, Z')| := M(Z') < 1$; donc le déve-

loppement du crochet de (3) converge normalement, et (4) aussi, car

$$\sup_{n \in [1, n_S]} \left| n^{-2} (R_S/r) \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} f(n, Z')^p \right| \leq \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} M^p \approx \frac{M^p}{\sqrt{\pi p}}$$

– critère suffisant car l'intégrale (3) est définie (*i.e.* sur un domaine borné).



Cette remarque rappelle que (4) est inutilisable pour la réfraction au voisinage de l'horizon ($Z' \cong 90^\circ$) car on n'a plus $M(Z') < 1$.

Avec un raisonnement analogue à celui mené pour exprimer a_0 en fonction du moment H d'ordre 1, on trouve, en approximant d'emblée le préfacteur n_s / n^{-2} par 1, pour une loi $n(r)$ plus générale

$$\left[\frac{n_s - 1}{\mu_s} R_s \frac{(2p-1)!!}{2^p p!} \right]^{-1} a_p \cong \int_0^{\mu_s} r^{-1} \left(1 - \frac{n_s^2 R_s^2}{n^2 r^2} \right)^p d\mu = \left[r^{-1} \left(1 - \frac{n_s^2 R_s^2}{n^2 r^2} \right)^p \mu \right]_0^{\mu_s} - \int_{\infty}^{R_s} \mu \frac{d}{dr} \left[r^{-1} \left(1 - \frac{n_s^2 R_s^2}{n^2 r^2} \right)^p \right] dr$$

$$= \int_{R_s}^{\infty} \frac{\mu}{r^2} \left(1 - \frac{n_s^2 R_s^2}{n^2 r^2} \right)^{p-1} \left[2p \frac{n_s^2 R_s^2}{n^2 r^2} \left(1 + \frac{r}{n} \frac{dn}{dr} \right) - \left(1 - \frac{n_s^2 R_s^2}{n^2 r^2} \right) \right] dr \ll \frac{2^p}{R_s^2} \int_0^{\infty} p \left(n - n_s + \frac{z}{R_s} \right)^{p-1} \mu dz \cong \frac{2^p}{R_s^{p+1}} \int_0^{\infty} p z^{p-1} \mu dz$$

$$= \frac{2^p}{R_s^{p+1}} \left\{ \left[z^p \mu \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} z^p \mu' dz \right\} = 2^p \frac{\mu_s h_p^p}{R_s^{p+1}}$$

où intervient le **moment d'ordre p** de $-\mu'(z)$, exprimé

avec h_p tel que $\mu_s h_p^p := - \int_0^{\infty} z^p \mu'(z) dz$ pour $p \geq 1$, d'où finalement $a_p \cong \frac{(2p-1)!!}{p!} (n_s - 1) \left(\frac{h_p}{R_s} \right)^p$

On retrouve bien l'expression (5) déjà obtenue pour l'atmosphère isotherme (de hauteur d'échelle H) puisque h_p est donné par

$$h_p^p := - \int_0^{\infty} z^p [\mu'(z) / \mu_s] dz = \int_0^{\infty} z^p e^{-z/H} dz / H = H^p \Gamma(p+1)$$

donc (voir KRAMP) $h_p^p = p! H^p$ pour $p \geq 1$, d'où finalement $h_1^1 = h_1 := H$.

- Mais sans la dernière approximation il intervient aussi des moments de $-(\mu^q)'(z)$ qui, dans le cas isotherme, s'expriment en remplaçant H par H/q .

I- Les fondateurs

II- Les géodésiens expérimentateurs

III- Les classiques

IV- Les géodésiens métrologistes

V- Les continuateurs et les ouvreurs



Dans le cas d'une atmosphère illimitée comme celle du modèle isotherme, c'est **l'approximation majorante** ci-dessus, dans l'estimation de a_p , qui a un effet désastreux pour p grand, et **ruine la convergence pour tout $Z' \neq 0^\circ$** , en introduisant les moments h_p qui croissent trop vite !



Mais pour une atmosphère limitée (comme celle du modèle polytropique) **l'ensemble des h_p est borné donc la série approchée converge pour $\tan Z'$ assez petit.**



Pour atténuer le problème de la divergence, RADAU repart de

$$\mathcal{R} = n_S R_S \int_1^{n_S} n^{-2} r^{-1} \left[\cot^2 Z' + \left(1 - \frac{n_S^2 R_S^2}{n^2 r^2} \right) \right]^{-1/2} dn \cong \int_1^{n_S} \left[\cot^2 Z' + \left(1 - \frac{n_S^2 R_S^2}{n^2 r^2} \right) \right]^{-1/2} dn$$

Puis il fait d'autres approximations sur le terme $1 - \frac{n_S^2 R_S^2}{n^2 r^2}$,

effectue ensuite un changement de variable, et retrouve le développement d'IVORY dont les coefficients sont des intégrales où interviennent des polynômes de LEGENDRE, mais n'évoque plus le problème de la convergence...

Pour faciliter l'intégration, il y a lieu, le plus souvent, de recourir au théorème de Lagrange, qui permet d'introduire, à la place d'une variable x , la variable nouvelle $w = x - \varphi(x)$, en faisant

$$\frac{dF(x)}{dx} = e^{D_w \varphi(w)} F'(w)$$

$$= F'(w) + D_w[\varphi(w)F'(w)] + \frac{1}{1.2} D_w^2[\varphi^2(w)F'(w)] + \dots$$

Soit $F(x) = e^{-x}$, et supposons que $\varphi(0) = 0$; on aura

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{Z^2 + x - \varphi(x)}} = \int_0^\infty \frac{dw}{\sqrt{Z^2 + w}} e^{D_w \varphi(w)} e^{-w},$$

ou bien, en écrivant maintenant x à la place de w sous le signe \int :

$$(40) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{Z^2 + x - \varphi(x)}} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{Z^2 + x}} e^{D_x \varphi(x)} e^{-x} = \int_0^\infty \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{Z^2 + x}} e^{D_x \varphi(x)}.$$

Le développement ci-dessus offre un moyen commode d'évaluer certaines intégrales définies. Soit, par exemple, $X = \alpha + \beta x + \gamma x^2$; en posant

$$C = \frac{1}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha + \beta + \gamma}},$$

on aura

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = 2C + \frac{2}{3}\gamma C^3 + \frac{2}{3}\gamma^2 C^5 + \frac{2}{7}\gamma^3 C^7 + \dots,$$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = C - \frac{1}{3}\beta C^3 - \frac{1}{3}\beta\gamma C^5 - \frac{1}{7}\beta\gamma^2 C^7 - \dots$$

De même, en posant $C = \frac{1}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha + \beta + \gamma + \delta x^2}}$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3}} = 2C + (\frac{2}{3}\gamma + \delta)C^3 + (\frac{2}{3}\gamma^2 + \frac{2}{3}\gamma\delta - \frac{1}{5}\beta\delta + \frac{2}{7}\delta^2)C^5 + \dots,$$

et, en posant $C = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - k^2}}$,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = C + \frac{1}{4}k^2 C^3 + \frac{9}{64}k^4 C^5 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \dots 2n-1}{2 \cdot 4 \dots 2n}\right)^2 k^{2n} C^{2n+1} + \dots$$

Muni de cet outillage, il montre que le modèle d'atmosphère isotherme ne rend pas bien compte de $\mathcal{R}(Z')$ observé lorsque Z' décrit $[85^\circ, 90^\circ]$ (alors que c'était évident par le théorème de BIOT !).

Il établit et compare ensuite les résultats de différents modèles.

Lorsqu'on part de l'hypothèse d'un décroissement uniforme de la température, l'expression de la réfraction peut s'obtenir de plusieurs manières. Voici d'abord la méthode d'intégration indiquée par Ivory. En posant $\frac{z}{z_0} = 1 - \frac{y}{k+1} = x$, les équations (30) donnent $\eta = x^k$, et l'on trouve facilement

$$r = \Lambda \sin z \sqrt{\frac{R}{2l_0(k+1-\varepsilon)}} \int_0^1 \frac{kx^{k-1} dx}{\sqrt{Z^2+1-x-\gamma(x-x^k)}}$$

où

$$Z^2 = \frac{R \cos^2 z}{2l_0(k+1-\varepsilon)}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon}{k+1-\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha R}{l_0}$$

En développant suivant les puissances de γ , et en intégrant par parties, cette intégrale se ramène à la suivante :

$$\int_0^1 \frac{k dx}{\sqrt{Z^2+1-x}} \left[x^{k-1} - \gamma D_x x^k (1-x^{k-1}) + \frac{\gamma^2}{1.2} D_x^2 x^{k+1} (1-x^{k-1})^2 - \dots \right],$$

c'est-à-dire à une somme d'intégrales de la forme

$$\int_0^1 \frac{x^{n(k-1)} dx}{\sqrt{Z^2+1-x}}$$

dont l'expression se déduit immédiatement de la formule (19 bis) du § V, en posant $Z = \frac{1-\zeta^2}{2\zeta}$ et $n(k-1) = m-1$. Ivory trouve, en faisant $k=4$ et en négligeant γ^3 ,

$$r = \sin z (1048'' \cdot 9 \zeta + 658'' \cdot 2 \zeta^2 + 252 \cdot 9 \zeta^3 + 59'' \cdot 6 \zeta^4 + 11'' \cdot 6 \zeta^5 + 2 \cdot 9 \zeta^6 + \dots),$$

d'où $R = 2034'' \cdot 3$ pour $l_0 = 10^6$, $B_0 = 760$.

S'ensuivent de nombreuses discussions...

Remarques

Le caractère alterné de la série (4), et impair (évident par symétrie) favorise l'obtention d'une bonne approximation.



Carl Max BAUERNFEIND, « Die atmosphärische Strahlenbrechung », *Astron. Nachrichten* **62**, 209–252 (1864) mène les calculs jusqu'à l'ordre 28 en $\sec Z'$ pour une atmosphère d'indice polytropique égal à $5 > 2,5$ (donc stable), où la pression varie proportionnellement à $\mu^{1+(1/5)} \dots$

En valeur absolue, les termes d'ordre plus élevé de (4) croissent plus vite avec Z' que les termes d'ordre inférieur ; cela peut **instiller une idée fautive suivie par IVORY, NEWCOMB, etc.** : que **les moments d'ordre élevé** de $-\mu'(z)$, et donc **la structure de la haute atmosphère, joueraient un rôle important dans la réfraction près de l'horizon – dont on pourrait déduire cette structure** ; c'est tout le contraire, comme l'avaient deviné BESSEL, BIOT, etc. **Le caractère alterné de (4) fait que les évolutions des termes d'ordre élevé se compensent partiellement.**

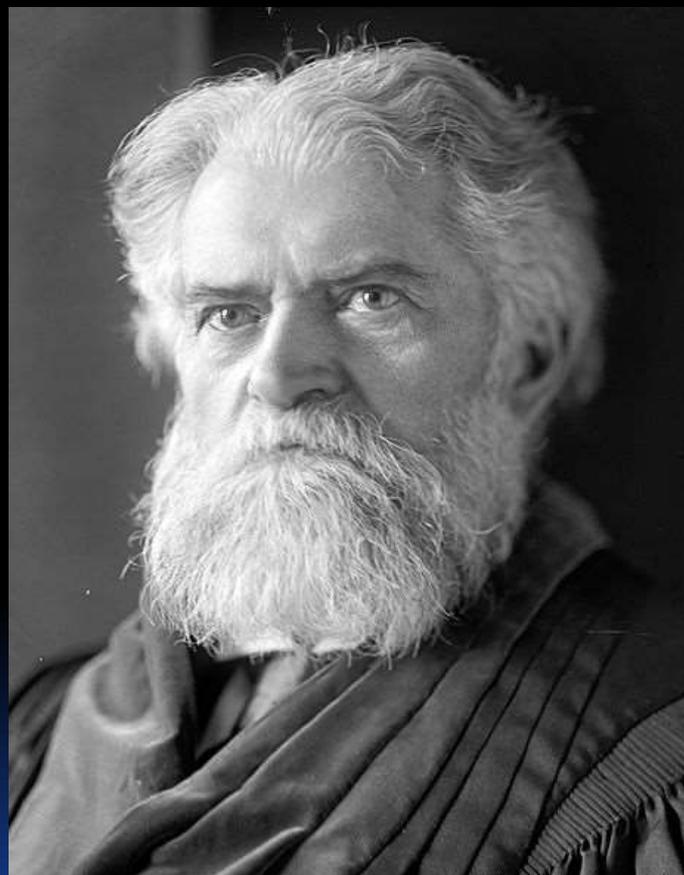
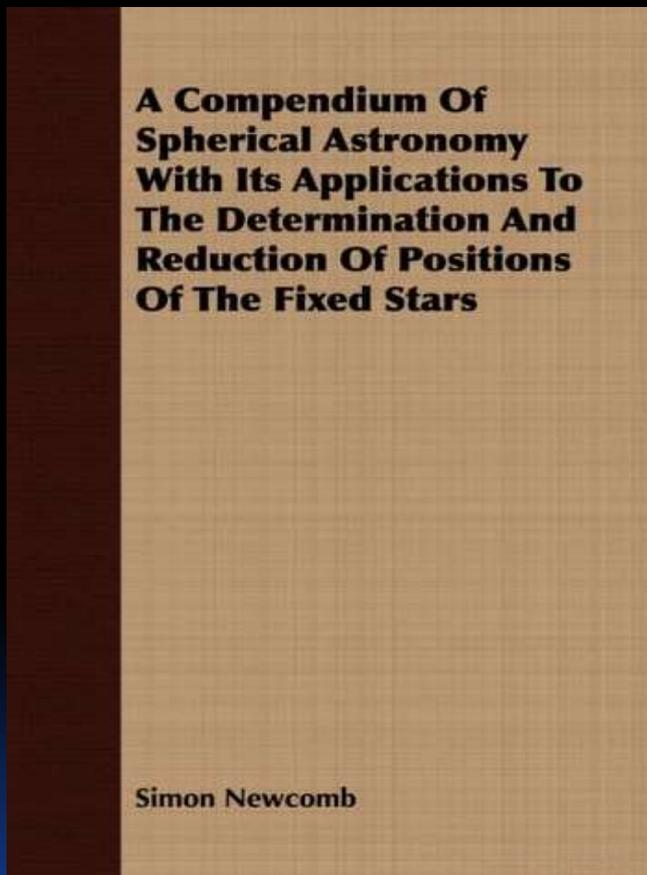
Si le gradient troposphérique de température se conservait dans la stratosphère, comme le théorème d'ORIANI s'y applique même pour la réfraction horizontale au sol, celle-ci ne changerait que de 2"... Pourtant **la réfraction horizontale est due pour 1 / 8 à la stratosphère !**

En effet, toujours dans le cas de la réfraction horizontale, pour un point P sur la tropopause standard à la distance $r_P = R_S + 11$ km où (à $-56,5$ °C et 226,32 hPa) l'indice à 550 nm vaut $n_P \cong 1,000\,078\,2$ sur un rayon arrivant de l'infini dans un milieu à symétrie sphérique où l'angle du rayon par rapport à la direction radiale en P vaut θ_P , avec l'invariant de BOUGUER on trouve

$$\theta_P = \arcsin \frac{n_S R_S}{n_P r_P} \cong 86,8^\circ$$

assez inférieur à 90° pour que la réfraction partielle \mathcal{R}_P (*i.e.* celle observée en P) soit nettement moins sensible à la façon dont l'indice tend vers 1 au dessus de P .

L'écriture sous forme de série, qui a connu tant de succès en mécanique céleste au XIX^e, a été suivie aussi pour \mathbb{R} et a freiné la compréhension des propriétés de \mathbb{R} (d'où l'idée fausse de NEWCOMB et son insatisfaction avouée dans son livre).



Simon NEWCOMB
(1835-1909)

Enfin, le calcul numérique de l'intégrale de BIOT / AUER-STANDISH est bien plus efficace !

I- Les fondateurs

II- Les géodésiens expérimentateurs

III- Les classiques

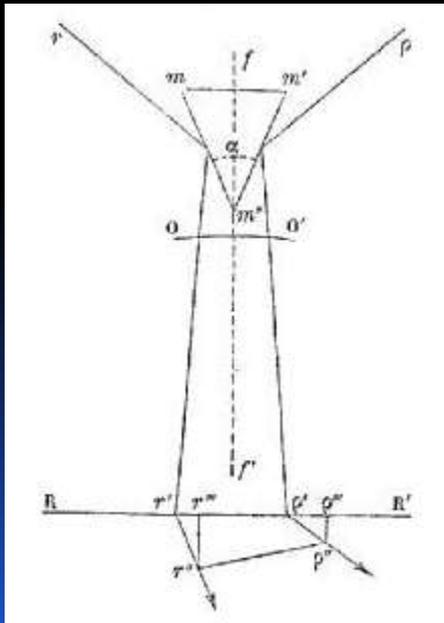
IV- Les géodésiens métrologistes

V- Les continuateurs et les ouvreurs

Pour permettre à un observateur d'observer à la lunette le ciel entier sans quitter son siège, LOEWY invente l'équatorial coudé, qu'il utilise à Paris pour mesurer d'abord des positions d'astéroïdes, de comètes et de nébuleuses (1883-1886).

En 1886, LOEWY tente de mesurer plus précisément, avec cet équatorial, la réfraction astronomique. Pour cela il place devant l'objectif un prisme d'angle 45° dont les faces sont argentées, de façon à superposer les images d'objets angulairement distants de 90°.

En choisissant d'observer ainsi une paire d'étoiles qui sont initialement à la même hauteur, et en notant la variation d'écart vertical entre leurs images jusqu'à ce que l'une d'elles arrive à l'horizon, on en déduit des mesures précises de la réfraction. LOEWY n'a pas publié ses résultats, mais en 1905 il réfléchissait encore à de nouvelles mesures, empêchées par son décès brutal.



Maurice LOEWY (1833-1907)
Directeur de l'Observatoire de Paris,
de 1896 à 1907

En 1866 Antoine D'ABBADIE (1810-1897), au début de la construction de son château néo-gothique dans le pays basque, voulait étudier les changements d'azimut apparent dus à la réfraction – ce qui serait important pour les mesures géodésiques comme celles qu'il a faites lors de son exploration de l'Abyssinie et pour son établissement de la première cartographie de ce pays.

Il avait prévu des ouvertures dans les murs pour y installer les composants d'une lunette d'une vingtaine de mètres de focale visant le sommet de La Rhune.
Mais cette expérience fut un échec, probablement par défaut de qualité des images.



Château d'Abbadia (Hendaye)



Au lieu de faire boucher ces ouvertures lors de la suite de la construction du château, D'ABBADIE les a laissées apparentes, et a mis autour de l'une d'elles une pierre monumentale gravée d'une devise écrite par lui en basque :

« *Ez ikusi, ez ikasi* » (= « je n'ai rien vu, je n'ai rien appris »).



Vestibule d'entrée du château d'Abbadia

V - ... ET LES OUVREURS

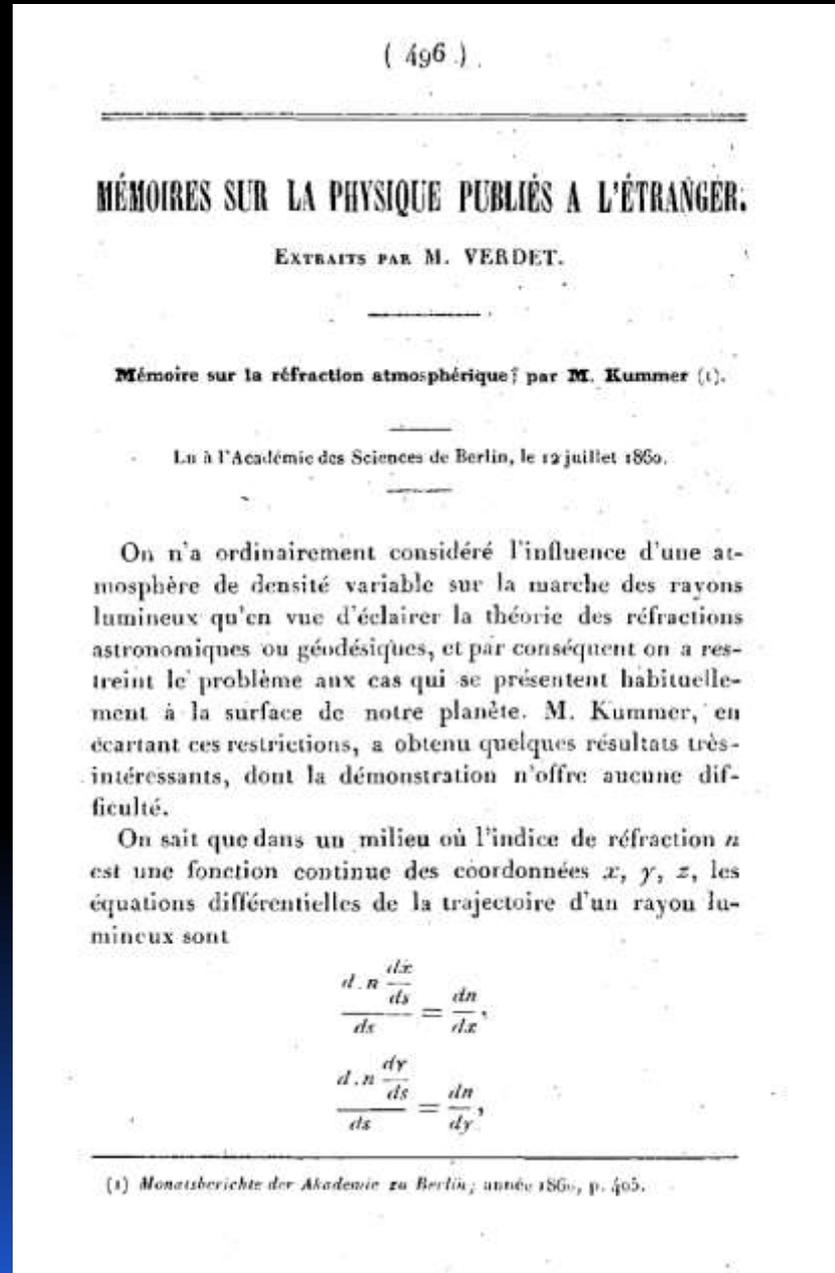
E. E. KUMMER, « Über atmosphärische Strahlenbrechung », *Monatsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* **5**, 405–420 (1860)



Ernst KUMMER (1810-1893), inventeur d'une méthode d'accélération de la convergence d'une série...

traduit par VERDET dans

Ann. Chim. Phys., série 3, **61**, 496–507 (1861).



On n'a ordinairement considéré l'influence d'une atmosphère de densité variable sur la marche des rayons lumineux qu'en vue d'éclairer la théorie des réfractions astronomiques ou géodésiques, et par conséquent on a restreint le problème aux cas qui se présentent habituellement à la surface de notre planète. M. Kummer, en écartant ces restrictions, a obtenu quelques résultats très-intéressants, dont la démonstration n'offre aucune difficulté.

KUMMER montre que dans certains cas un rayon pourrait avoir un cercle asymptote entourant le sol ; alors, grâce aux rayons voisins, on pourrait voir un niveau d'accumulation pour une infinité d'images du sol (ou même plusieurs niveaux d'accumulation d'images du ciel) !

Son travail fut trop original par rapport à ce qu'utilisaient les astronomes ; il a sombré dans l'oubli.

Enfin, il est à remarquer qu'un observateur placé en dehors de la surface de la planète doit voir d'abord une image principale circulaire de la surface *totale* de la planète, et tout autour une infinité d'images annulaires. Il voit même dans l'atmosphère de cette planète une infinité d'images de la sphère céleste. Ces deux conséquences sont faciles à apercevoir en examinant avec un peu d'attention les propriétés des trajectoires lumineuses qui viennent d'être exposées. C'est en particulier ainsi que la planète sera vue par un astronome placé sur la Terre.

Il est évident que les conclusions des calculs précédents ne s'appliquent en toute rigueur qu'au cas d'une atmosphère absolument transparente. Dans la réalité on ne verra un peu distinctement à la surface de Jupiter qu'une partie de la première image de la planète et de la première image du ciel. Tout au plus le Soleil demeurera-t-il constamment visible. Quant aux images ultérieures, elles seront sans doute tellement affaiblies, que leur ensemble donnera simplement naissance à une bande bleue s'étendant des deux côtés de l'horizon apparent à une distance plus ou moins grande.

F. HAUSDORFF,
 « Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung », *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Classe* **43**, 491–566 (1891) ; **45**, 120–162 (1893) ; **45**, 758-804 (1893).

Dans cette thèse, puis son habilitation (1895), HAUSDORFF était motivé par le problème inverse : la détermination de la structure de l'atmosphère (et surtout sa partie haute, inaccessible à son époque). BOUGUER et BIOT considéraient qu'elle était bornée, mais ils savaient aussi que son influence sur la réfraction est infime ; HAUSDORFF retrouve cela. **Bien des recherches au XIX^e, sur ce problème mal posé, ont ainsi été menées en pure perte !**

- Originalité de son approche : **il propose d'autres développements en série rigoureux**, reliant la réfraction (puis – dans son habilitation – l'absorption) à la structure de l'atmosphère ; leurs expressions témoignent d'une grande virtuosité mathématique.

Malheureusement ils ne sont pas plus utiles que les développements précédents ; et HAUSDORFF montre que les mesures de l'absorption n'étaient pas assez précises pour permettre de déduire la structure de l'atmosphère. Ce travail, n'ayant pas eu de suite, est tombé dans l'oubli.

- Il traite aussi du très faible effet de l'aplatissement de la Terre.



Félix HAUSDORFF (1870-1942)

T. A. BANAKHEVICH, « Tri eskiza po teorii refraktsii », *Ucheniya Zapiski [Kazan]* **82**, N° 10, 1–27 (1915)

Regroupe des mesures de variations relatives de réfraction horizontale dues à des variations relatives de réfractivité au sol (en fait des variations de pression, à température fixée) ; montre que celles-là excèdent de 10 % celles-ci – rarissime publication prenant cet effet en compte !

Pour un profil de réfractivité de forme fixée, la réfraction n'est pas proportionnelle à la réfractivité au sol (cf. la formule de BRADLEY par ex.) : **ceci est sensible surtout pour la réfraction horizontale** – puisqu'elle tend vers l'infini dans les conditions de guidage – et augmente des 10 % ci-dessus la durée du flash vert (ou bleu si la profondeur optique verticale des aérosols est au plus 0,002) par rapport à la prédiction faite en admettant que la réfraction horizontale est quasi proportionnelle à la réfractivité quand celle-ci varie de 0 à 0,0003...



77. *Erreurs probables des Tables de réfraction.* — L'hypothèse fondamentale que nous avons admise, en supposant que l'atmosphère se compose de couches concentriques, dont la densité varie suivant une loi déterminée avec la hauteur au-dessus de la Terre, ne représente pas l'état réel de l'atmosphère. Celle-ci est constamment soumise à des causes diverses qui en troublent l'équilibre; le nombre qu'une Table quelconque donnera pour valeur de la réfraction ne sera donc pas en général le nombre réel qu'on déduirait de l'observation, mais on devra le considérer comme la moyenne des résultats d'un grand nombre d'observations, ou, en d'autres termes, comme se rapportant à un état moyen de l'atmosphère.

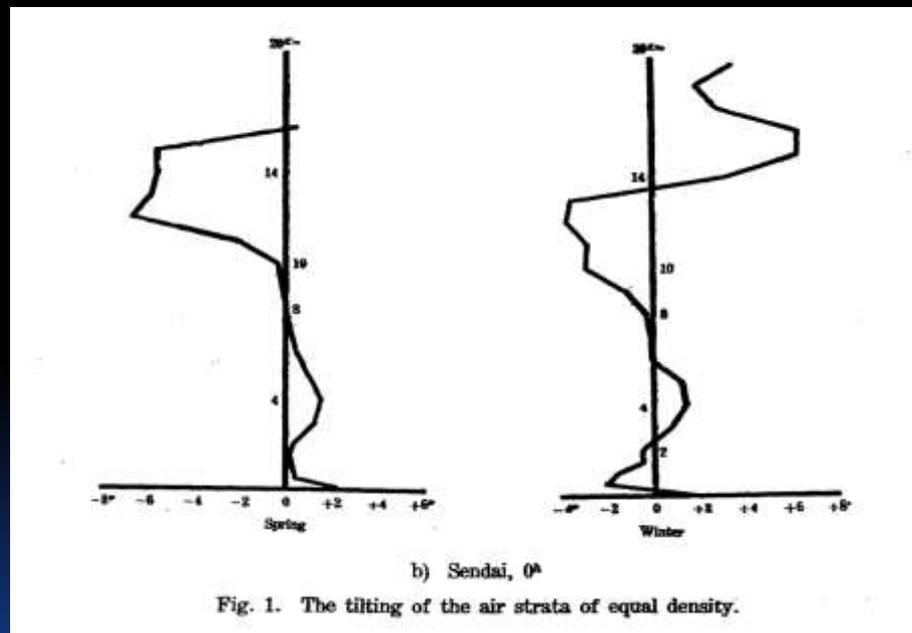
Bessel a comparé les nombres de ses Tables avec les valeurs observées, et a pu ainsi déterminer leur erreur probable pour les différentes distances zénithales. Il a publié les résultats de cette comparaison dans l'introduction aux *Tabulæ Regiomontanæ*, p. LXIII; nous citerons quelques nombres :

Distance zénithale.	Erreur probable.
45°	± 0",27
81°	± 1,00
85°	± 1,70
89° 30'	± 20,00

On voit par là que, surtout au voisinage de l'horizon, on ne devra considérer comme corrigée réellement de la réfraction que la moyenne d'un grand nombre d'observations faites dans des états très-différents de l'atmosphère.

C. SUGAWA , « On the effect of the anomalous refraction on the latitude observations », *PASJ* **8**, 27–39 (1956)

Étudie l'effet d'inclinaison des isopycnes : 1 à 2' en moyenne, 10' maximum. L'erreur produite sur les mesures de latitude ne dépasse pas 0,2".

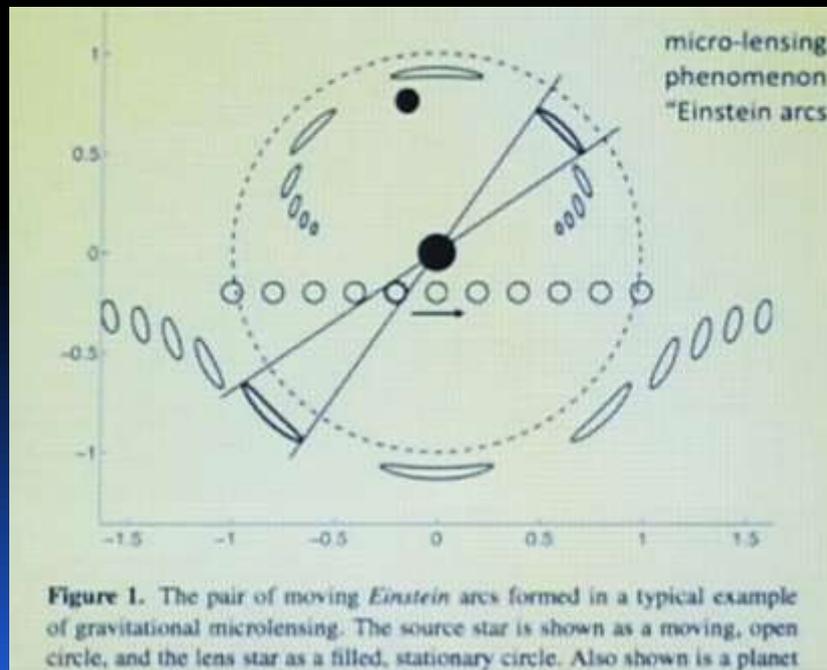


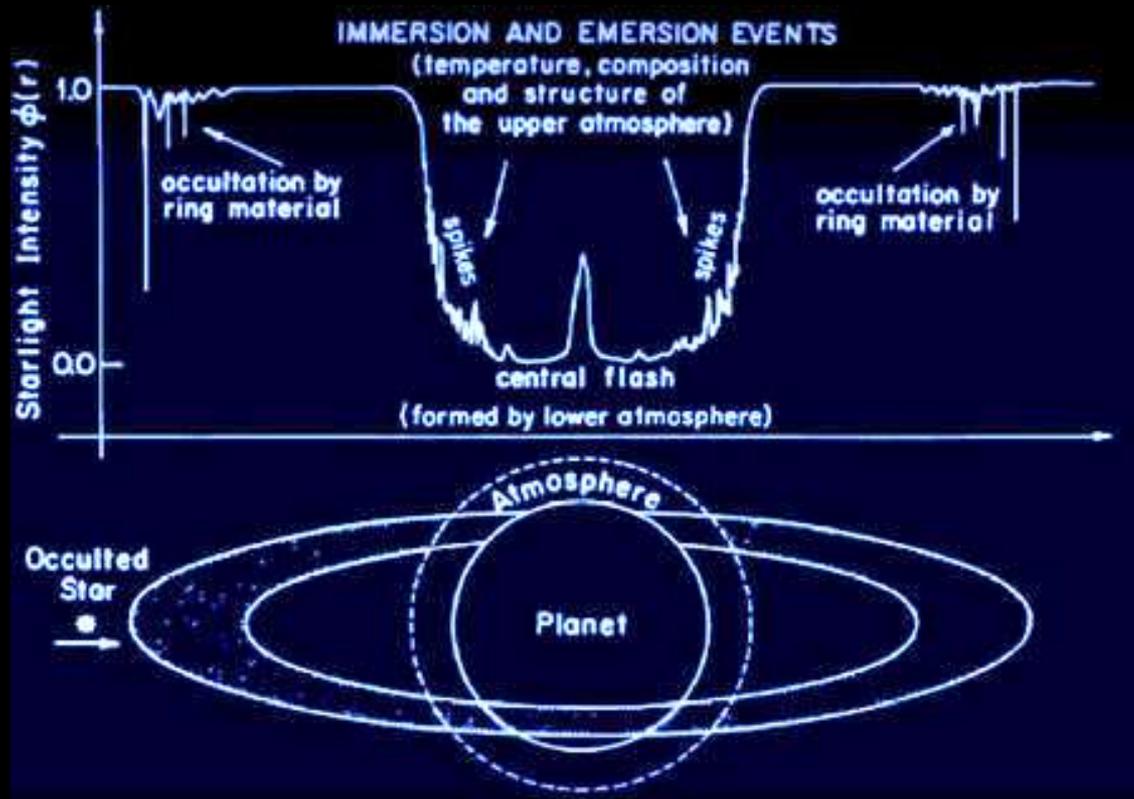
Établit les variations temporelles des anomalies saisonnières de réfraction.

AUTRE EFFET DE LA RÉFRACTION EN ASTRONOMIE : LE PIC CENTRAL DES COURBES DE LUMIÈRE LORS DES OCCULTATIONS STELLAIRES

L'interprétation des courbes de lumière dues à une occultation relève autant de la réfraction que de l'extinction. L'image de l'étoile occultée, et l'évolution de son angle solide, est similaire à celle obtenue avec un mirage gravitationnel.

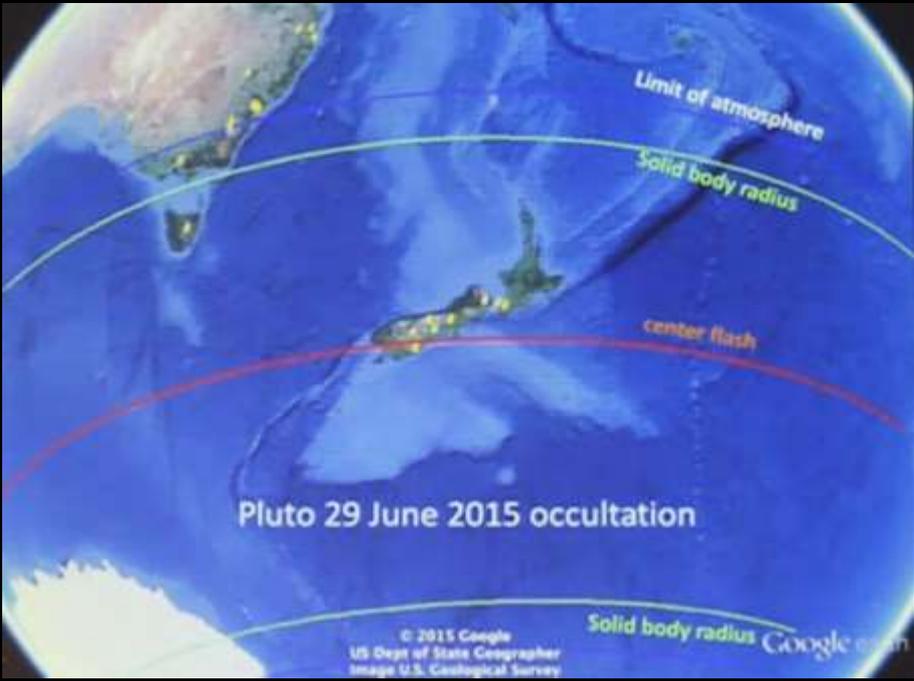
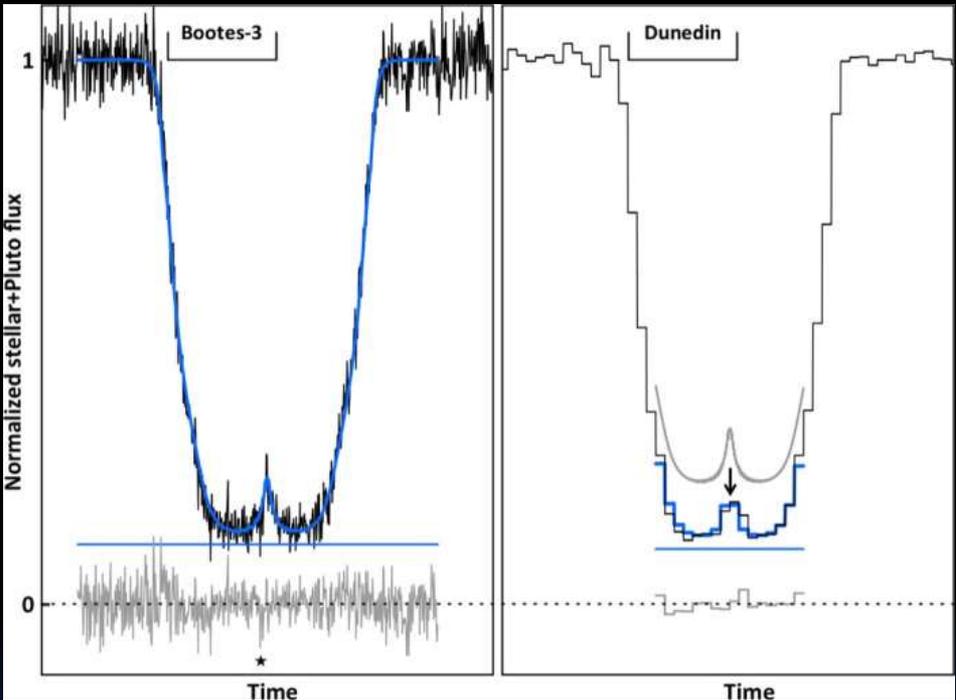
Noter que l'image est double quand la distance angulaire entre l'étoile et le corps occultant est assez petite – sinon la déviation maximale des rayons par l'atmosphère du corps occultant ne suffit pas pour produire la seconde composante de l'image qui est de l'autre côté du corps occultant par rapport à l'étoile. Compte tenu du faible diamètre angulaire du champ objet de l'instrument d'observation utilisé pour suivre l'occultation d'une étoile par un astre pourvu d'une atmosphère, il faut que celle-ci soit très ténue (par ex. comme celle de Pluton) pour que les séquences à une seule pseudo-image de l'étoile se déroulent quand cette image unique est dans le champ.





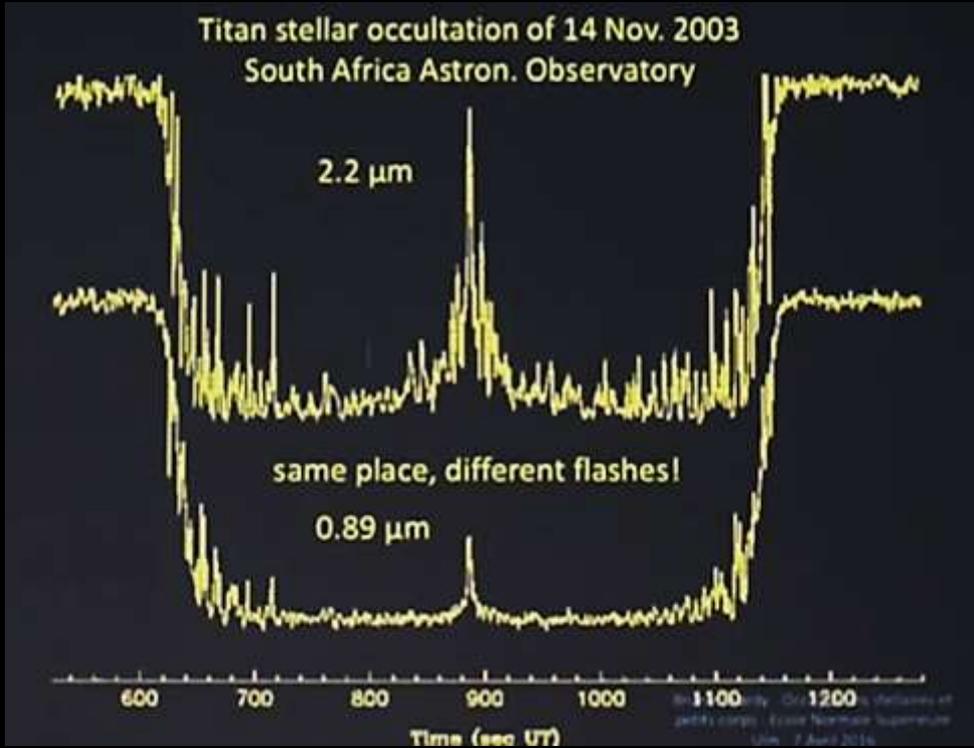
Il suffit que la déviation des rayons de l'étoile par l'atmosphère de l'astre occultant soit de l'ordre du diamètre apparent de celui-ci (0,1" dans le cas de Pluton) pour que l'effet soit notable sur les pentes de l'immersion et de l'émersion, visibles sur la courbe de lumière. La petitesse du diamètre apparent rend cette méthode très sensible : la pression minimale détectable au sol est quelques 10^{-9} bar.

Il est assez rare d'obtenir un flash central : il faut pour cela que l'observateur soit assez proche du milieu de la bande de totalité de l'occultation. Ce flash est dû à l'augmentation de l'angle solide sous lequel serait vue la pseudo-image géométrique de l'étoile.



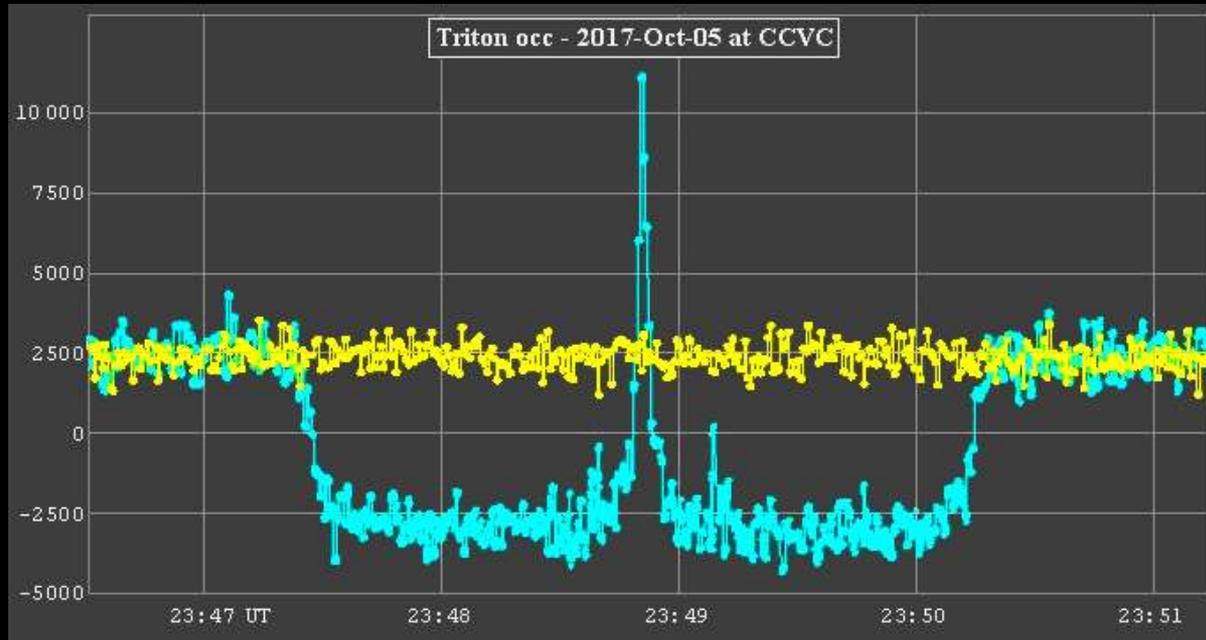
Flash central enregistré le 29 juin 2015, lors d'une occultation par Pluton, par deux observateurs terrestres en Nouvelle-Zélande, à 40 km au nord (resp. sud) de la ligne de centralité pour celui de gauche (resp. droite).

L'intérêt du flash central est qu'il correspond au sondage le plus profond de l'atmosphère du corps occultant.



Flashes centraux lors d'une occultation par Titan ; la différence entre eux est due à la différence d'extinction entre 0,89 μm et 2,2 μm.

De 0,5 μm à 2,3 μm l'absorption par les constituants essentiels de l'atmosphère de Titan (96 % N₂ ; 3,5 % CH₄) est négligeable. Le diamètre apparent de Titan est 0,7", donc les rayons produisant le flash central ont subi une déviation voisine de 0,4" due à l'atmosphère de Titan ; ils sont passés dans ses très hautes couches, vu sa pression au sol (1,5 bar) unique pour un satellite. Dans ses plus basses couches l'extinction de la lumière est due à la diffusion de MIE par les poussières organiques responsables des épaisses brumes de Titan ; mais dans ses très hautes couches l'extinction n'est quasiment due qu'à la diffusion RAYLEIGH, 37 fois plus faible à 2,2 μm qu'à 0,89 μm.



Spectaculaire flash central observé le 5 / 10 / 2017 lors de l'occultation d'une étoile de magnitude 12,7 par Triton (magnitude 13,5) ; la courbe de lumière jaune est celle d'une étoile de comparaison – pour démasquer les fausses occultations dues à des oiseaux, etc.
Rui Gonçalves & David Dunham / IOTA

Quand le flux maximal du flash central est plus grand que le flux avec l'étoile non-occultée, le facteur d'augmentation (de l'angle solide de la pseudo-image géométrique de l'étoile) est supérieur, parce que l'observateur est assez bien placé, au facteur d'extinction – parce que l'atmosphère du corps occultant est assez claire.

CONCLUSION

En partie autodidacte, BESSEL est l'un des rares astronomes considérant que la réfraction mérite d'être étudiée pour elle-même, et pas comme une simple correction.



HARZER effectue le premier calcul numérique à partir de données météorologiques.

Actuellement les calculs numériques sont basés sur la transformation de BIOT / AUER-STANDISH couplée au modèle RGO (une troposphère polytropicque surmontée d'une stratosphère isotherme).

Problème inverse : déterminer la distribution de la densité à symétrie sphérique, à partir du *profil* de réfraction (ou d'extinction) et de l'indice au niveau de l'observateur,

mal posé au dessus de l'observateur

(*cf.* la loi de SIMPSON, *cf.* BIOT et HAUSDORFF),

bien posé au dessous (unicité de la solution, grâce à un argument de symétrie permettant d'éliminer l'effet de l'atmosphère située au dessus de l'observateur – *cf.* BRUTON et KATTAWAR, 1997).

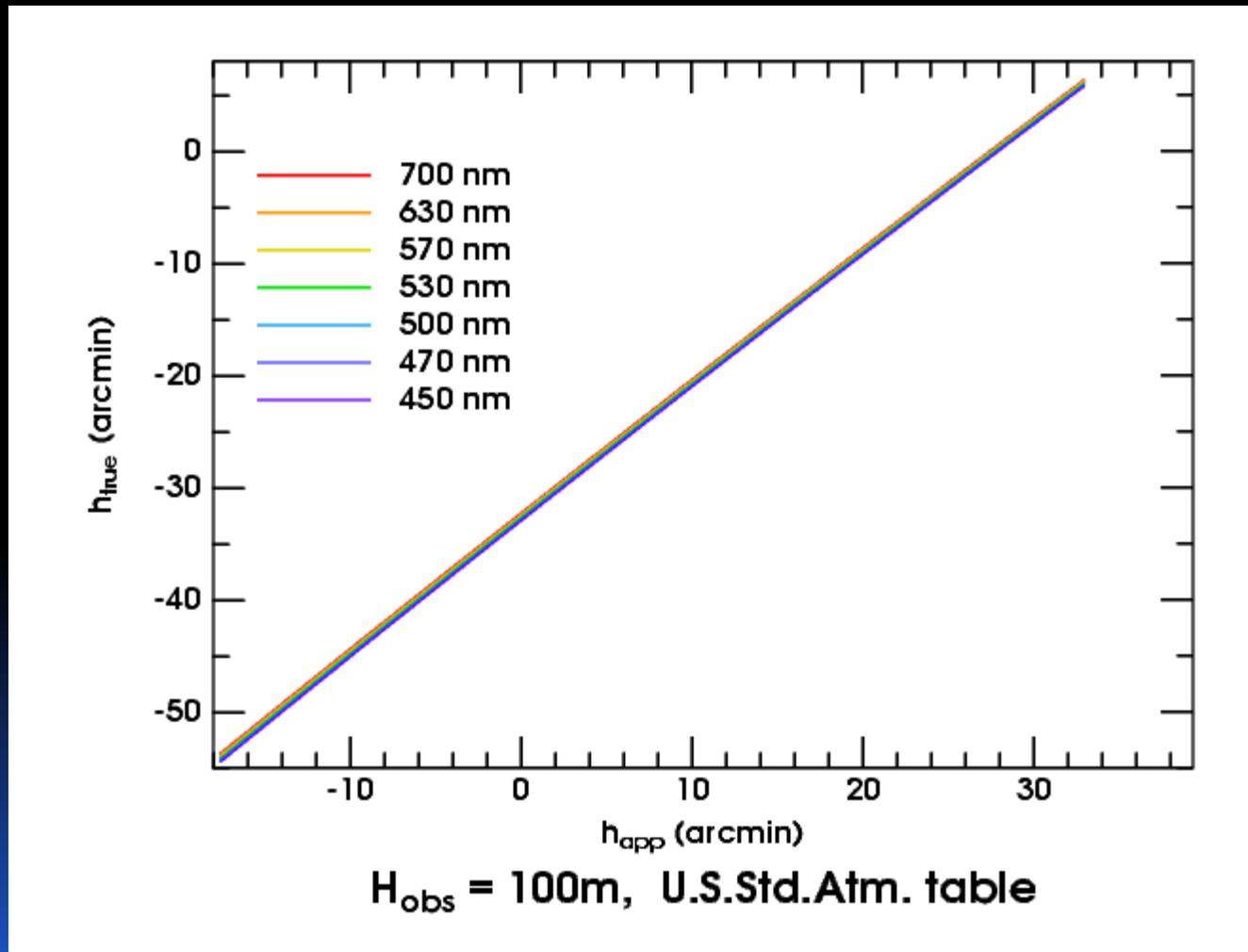


Historiquement, ***certaines idées fausses ont mis très longtemps à se dissiper*** – celles selon lesquelles :

- la vapeur d'eau jouerait un rôle sensible dans le visible ;
- le problème inverse serait bien posé au dessus de l'observateur ;
- la structure de la haute atmosphère aurait une influence notable sur la réfraction horizontale ;
- une réfraction horizontale plus forte que la normale serait nécessaire pour la formation du « rayon vert » ;
- les approximations usuelles des développements de type LAMBERT seraient convergentes.

Étude des déformations d'images avec les courbes de transfert

Cas standard : pente $1 / (1 - k) \cong 7 / 6 > 1$, d'où l'accourcissement

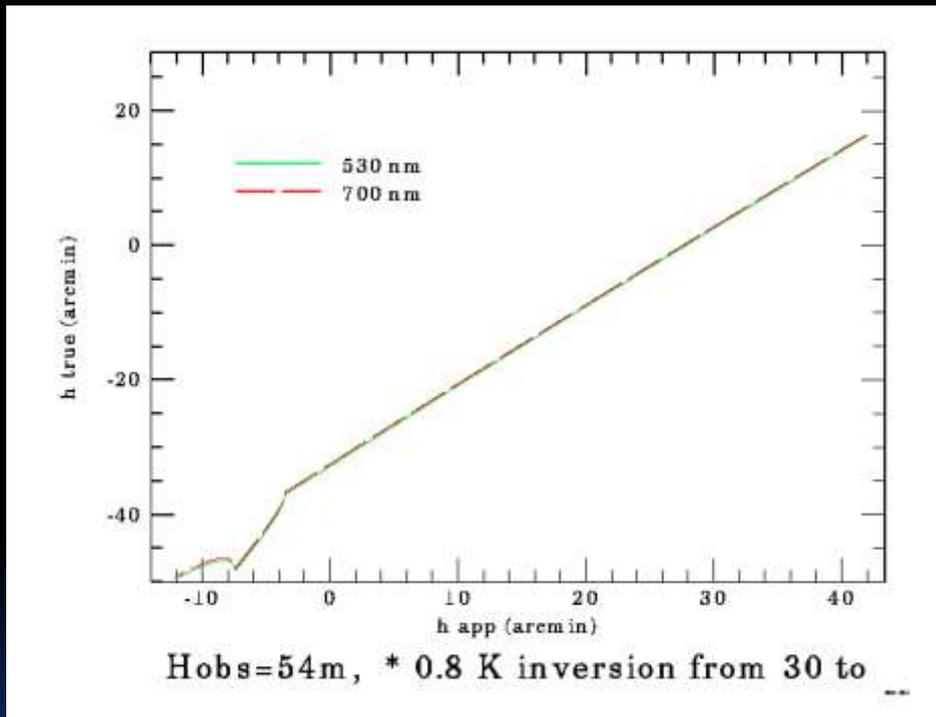


Pic Du Midi / OMP
Les Observateurs Associés / FIDUCIAL
CLIMSO L1 - H α solar telescope
Raw Image 6562.82 Å
www.climso.fr

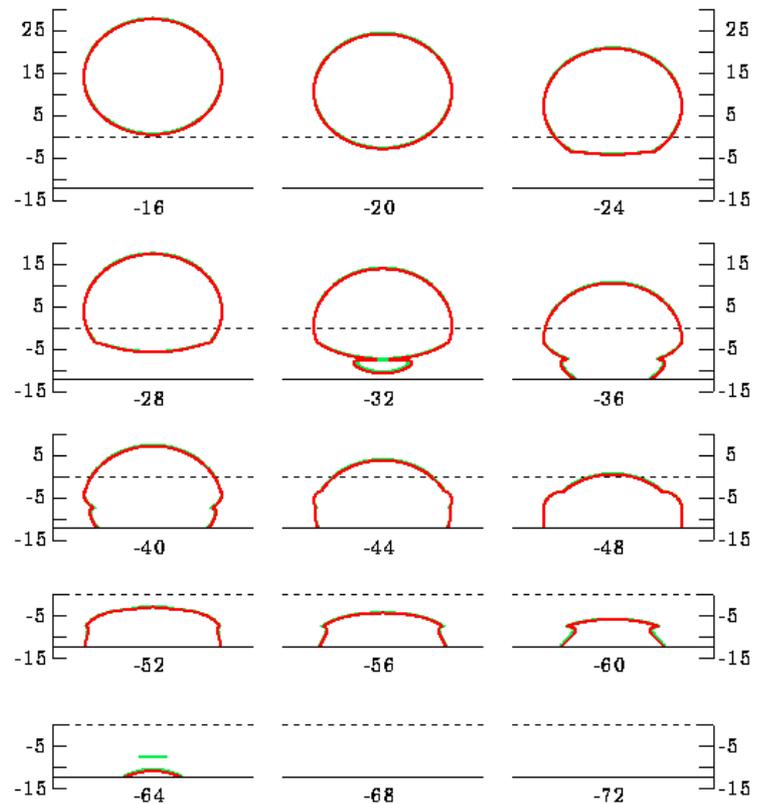
2011/10/30 07:35:00



Pseudo-mirage



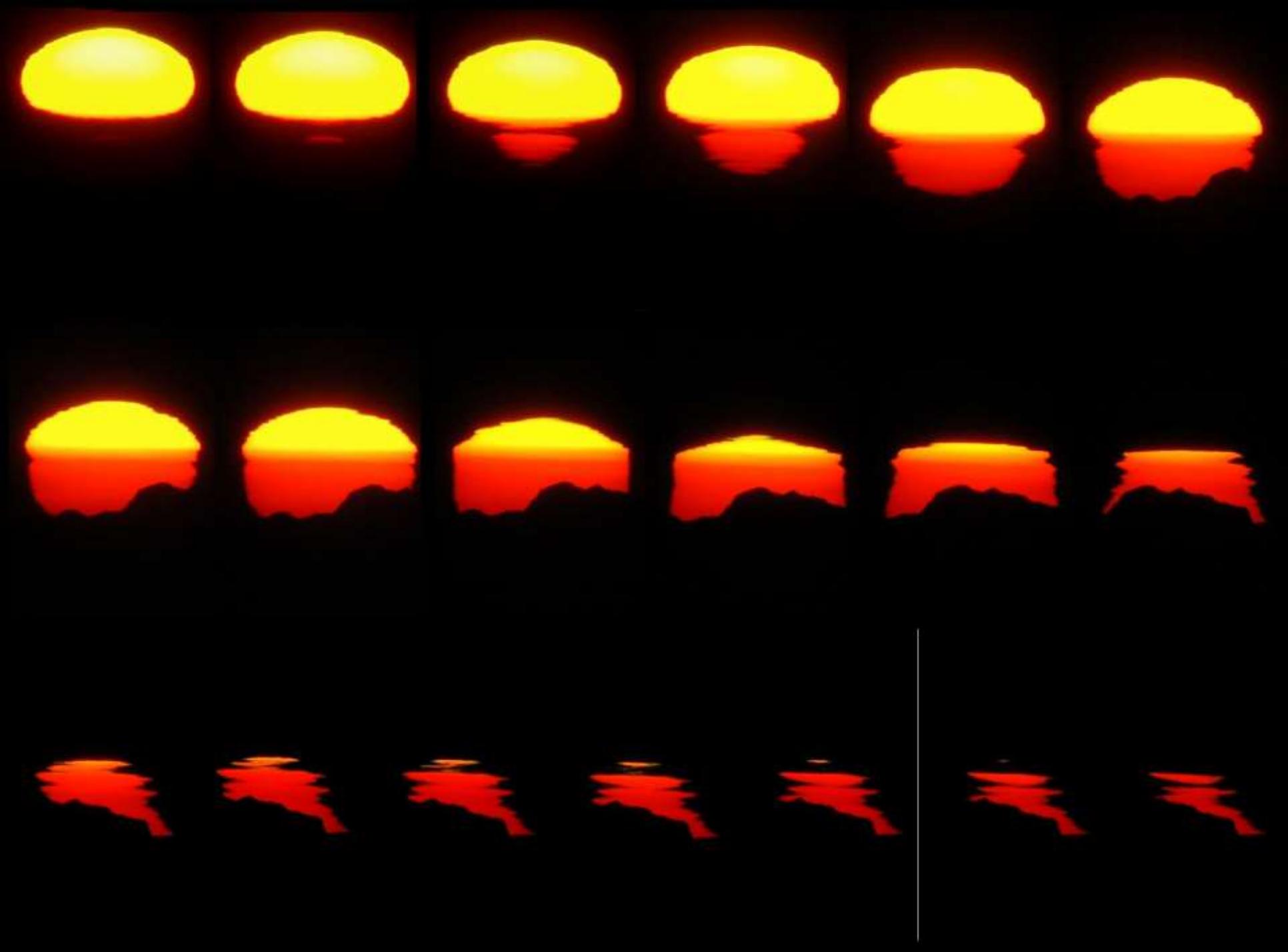
in [4]



inv_30_50_.8 at 54 m



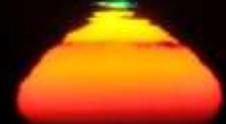
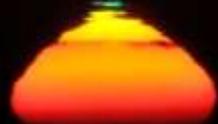






Sur ce film montrant un lever vu au travers d'au moins 3 couches d'inversion, noter que :

- la hauteur d'apparition du bérêt est aussi celle de détachement du flash correspondant – fait déjà noté empiriquement dans D. J. K. O'CONNELL, *The Green Flash and Other Low Sun Phenomena*, North Holland (Amsterdam, 1958) sans l'expliquer par les courbes de transfert ;
- entre autres d'après l'aplatissement du bas de l'image principale du Soleil juste après le détachement du flash rouge (qui permet d'estimer la pente maximale de la courbe de transfert), c'est la 2^e couche d'inversion qui a le gradient de température le plus grand – mais inférieur à 115 K / km car il n'y a pas de signes visibles de chenal optique ;
- au moins de la 25^e à la 30^e seconde, pour le bas de la partie d'image droite bien aplatie juste au-dessus de la paire d'encoches due à la 2^e couche d'inversion, on voit que la luminance présente un minimum perceptible, et conjecturable d'après le théorème d'extinction-réfraction ;
- le fait que l'image rougisse nettement quand on passe sous une encoche, et que la luminance moyenne soit nettement plus basse qu'au-dessus, peut être attribué au fait que dans la couche d'inversion associée l'atmosphère est notablement moins transparente pour une masse volumique donnée, car sa densité en aérosols aqueux est souvent plus forte (ce qui accroît au moins la diffusion).





Coucher de Lune vu depuis l'ISS, en accéléré

CRÉDITS - REMERCIEMENTS



BIBLIOGRAPHIE et NETOGRAPHIE

- [1] E. VASSY, *Physique de l'atmosphère, t. II : Phénomènes de réfraction*, Gauthier-Villars (Paris, 1961)
- [2] A. T. YOUNG, « Sunset science. IV. Low-altitude refraction », *Astron. J.* 127, 3622–3637 (2004)
- [3] A. T. YOUNG, « Understanding astronomical refraction », *Obs.* 126, 82-115 (2006)
- [4] A. T. YOUNG. (Page consultée le 13 mai 2017), *A Green Flash Page*, [En ligne]. Adresse URL : <http://aty.sdsu.edu/>

Usage d'archives JSTOR

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of JSTOR's Terms and Conditions of Use, available at <http://www.jstor.org/page/info/about/policies/terms.jsp>. JSTOR's Terms and Conditions of Use provides, in part, that unless you have obtained prior permission, you may not download an entire issue of a journal or multiple copies of articles, and **you may use content in the JSTOR archive only for your personal, non-commercial use**. Please contact the publisher regarding any further use of this work. Publisher contact information may be obtained at <http://www.jstor.org/action/showPublisher?publisherCode=rsl>. **Each copy of any part of a JSTOR transmission must contain the same copyright notice** that appears on the screen or printed page of such transmission. JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

Merci : à Henri AURIGNAC et Patrick MULLER (ou Guillaume BLANCHARD), Observateurs Associés au Pic du Midi (ou ESO) pour de belles photos / films du soleil ; l'équipe de labellisation de l'Année de la Lumière en France ; Michel CHASTANG, pour des traductions de latin scientifique ; et particulièrement Andrew T. YOUNG, pour de très fréquentes et amicales discussions, ainsi que l'échange de nombreux documents !