Le désordre n'existe pas

Roger Mansuy

FAsF18

2018

Introduction

≪ Complete disorder is impossible. ≫
Théodore Motzkin

Introduction

≪ Complete disorder is impossible. ≫
Théodore Motzkin

≪ On se fait une idée précise de l'ordre, mais non pas du désordre ≫
Jacques-Henri Bernardin de Saint-Pierre

Proposition

Étant donnée une « structure », tout « système suffisamment grand » contient cette « structure ».

Proposition

Étant donnée une « structure », il existe un entier N tel que tout « système de taille au moins N » contient cette « structure ».

Proposition

Étant donnée une « structure », il existe un entier N tel que tout « système de taille au moins N » contient cette « structure ».

Système de taille N

Structure recherchée

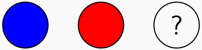
Valeur minimale de N

Exemples

- Principe des tiroirs (version simple)
- Théorème de van der Waerden (version simple)
- Théorème de Ramsey (version simple)
- Théorème de la fin heureuse
- Jeu de Set

Proposition

Dans tout coloriage de trois points avec deux couleurs, il existe (au moins) deux points coloriés de la même couleur.



Proposition

Dans tout coloriage de trois points avec deux couleurs, il existe (au moins) deux points coloriés de la même couleur.

coloriage de N points avec 2 couleurs

2 points de même couleur

$N = 3$

Proposition

Dans tout coloriage de points avec deux couleurs, il existe (au moins) trois points coloriés de la même couleur.

Proposition

Dans tout coloriage de points avec deux couleurs, il existe (au moins) trois points coloriés de la même couleur.

coloriage de N points avec 2 couleurs

3 points de même couleur

Proposition

Dans tout coloriage de cinq points avec deux couleurs, il existe (au moins) trois points coloriés de la même couleur.

coloriage de N points avec 2 couleurs

3 points de même couleur

$N = 5$

Proposition

Dans tout coloriage de ??? points régulièrement espacés avec deux couleurs, il existe trois points régulièrement espacés coloriés de la même couleur.

Proposition

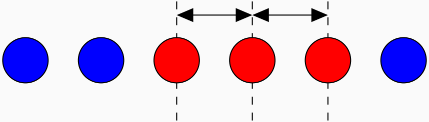
Dans tout coloriage de ??? points régulièrement espacés avec deux couleurs, il existe trois points régulièrement espacés coloriés de la même couleur.

coloriage de N points avec 2 couleurs

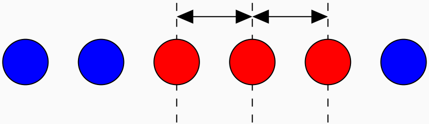
3 points de même couleur régulièrement espacés

???

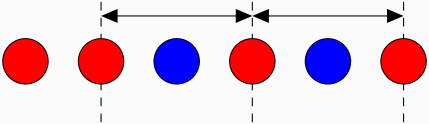
La contrainte interdit le coloriage suivant de 6 points car il y a trois points rouges régulièrement espacés :



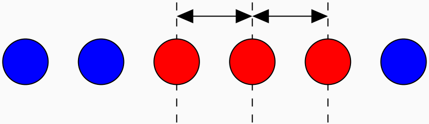
La contrainte interdit le coloriage suivant de 6 points car il y a trois points rouges régulièrement espacés :



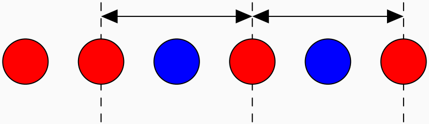
ou ce coloriage :



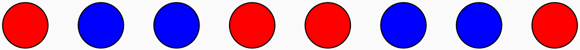
La contrainte interdit le coloriage suivant de 6 points car il y a trois points rouges régulièrement espacés :



ou ce coloriage :



En revanche, celui-ci pour 8 points est tout à fait admissible :



Proposition

Dans tout coloriage de neuf points régulièrement espacés avec deux couleurs, il existe trois points régulièrement espacés coloriés de la même couleur.

coloriage de N points avec 2 couleurs

3 points de même couleur régulièrement espacés

$N = 9$

Pour 9 points, il y a $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 512$ coloriages possibles...

et il faut tous les vérifier jusqu'à en trouver un qui a la bonne propriété...

- B, B, B, B, B, B, B, B, B
- B, B, B, B, B, B, B, B, R
- B, B, B, B, B, B, B, R, B
- B, B, B, B, B, B, B, R, R
- B, B, B, B, B, B, R, B, B
- B, B, B, B, B, B, R, B, R
- B, B, B, B, B, B, R, R, B
- B, B, B, B, B, B, R, R, R
- B, B, B, B, B, R, B, B, B
- B, B, B, B, B, R, B, B, R
- B, B, B, B, B, R, B, R, B
- B, B, B, B, B, R, B, R, R
- B, B, B, B, B, R, R, B, B
- B, B, B, B, B, R, R, B, R
- B, B, B, B, B, R, R, R, B
- B, B, B, B, B, R, R, R, R
- B, B, B, B, R, B, B, B, B
- B, B, B, B, R, B, B, B, R
- B, B, B, B, R, B, B, R, B

- B, B, B, B, R, B, B, R, R
- B, B, B, B, R, B, R, B, B
- B, B, B, B, R, B, R, B, R
- B, B, B, B, R, B, R, R, B
- B, B, B, B, R, B, R, R, R
- B, B, B, B, R, R, B, B, B
- B, B, B, B, R, R, B, B, R
- B, B, B, B, R, R, B, R, B
- B, B, B, B, R, R, B, R, R
- B, B, B, B, R, R, R, B, B
- B, B, B, B, R, R, R, B, R
- B, B, B, B, R, R, R, R, B
- B, B, B, B, R, R, R, R, R
- B, B, B, R, B, B, B, B, B
- B, B, B, R, B, B, B, B, R
- B, B, B, R, B, B, B, R, B
- B, B, B, R, B, B, B, R, R
- B, B, B, R, B, B, R, B, B

- B, B, B, R, B, B, R, B, R
- B, B, B, R, B, B, R, R, B
- B, B, B, R, B, B, R, R, R
- B, B, B, R, B, R, B, B, B
- B, B, B, R, B, R, B, B, R
- B, B, B, R, B, R, B, R, B
- B, B, B, R, B, R, B, R, R
- B, B, B, R, B, R, R, B, B
- B, B, B, R, B, R, R, B, R
- B, B, B, R, B, R, R, R, B
- B, B, B, R, B, R, R, R, R
- B, B, B, R, R, B, B, B, B
- B, B, B, R, R, B, B, B, R
- B, B, B, R, R, B, B, R, B
- B, B, B, R, R, B, B, R, R
- B, B, B, R, R, B, R, B, B
- B, B, B, R, R, B, R, B, R
- B, B, B, R, R, B, R, R, B
- B, B, B, R, R, B, R, R, R
- B, B, B, R, R, R, B, B, B
- B, B, B, R, R, R, B, B, R
- B, B, B, R, R, R, B, R, B
- B, B, B, R, R, R, B, R, R
- B, B, B, R, R, R, R, B, B
- B, B, B, R, R, R, R, B, R
- B, B, B, R, R, R, R, R, B
- B, B, B, R, R, R, R, R, R
- B, B, R, B, B, B, B, B, B
- B, B, R, B, B, B, B, B, R
- B, B, R, B, B, B, B, R, B
- B, B, R, B, B, B, B, R, R
- B, B, R, B, B, B, R, B, B
- B, B, R, B, B, B, R, B, R
- B, B, R, B, B, B, R, R, B
- B, B, R, B, B, B, R, R, R
- B, B, R, B, B, R, B, B, B
- B, B, R, B, B, R, B, B, R

- B, B, R, B, B, R, B, R, B
- B, B, R, B, B, R, B, R, R
- B, B, R, B, B, R, R, B, B
- B, B, R, B, B, R, R, B, R
- B, B, R, B, B, R, R, R, B
- B, B, R, B, B, R, R, R, R
- B, B, R, B, R, B, B, B, B
- B, B, R, B, R, B, B, B, R
- B, B, R, B, R, B, B, R, B
- B, B, R, B, R, B, B, R, R
- B, B, R, B, R, B, R, B, B
- B, B, R, B, R, B, R, B, R
- B, B, R, B, R, B, R, R, B
- B, B, R, B, R, B, R, R, R
- B, B, R, B, R, R, B, B, B
- B, B, R, B, R, R, B, B, R
- B, B, R, B, R, R, B, R, B
- B, B, R, B, R, R, B, R, R
- B, B, R, B, R, R, R, B, B
- B, B, R, B, R, R, R, B, R
- B, B, R, B, R, R, R, R, B
- B, B, R, B, R, R, R, R, R
- B, B, R, R, B, B, B, B, B
- B, B, R, R, B, B, B, B, R
- B, B, R, R, B, B, B, R, B
- B, B, R, R, B, B, B, R, R
- B, B, R, R, B, B, R, B, B
- B, B, R, R, B, B, R, B, R
- B, B, R, R, B, B, R, R, B
- B, B, R, R, B, B, R, R, R
- B, B, R, R, B, R, B, B, B
- B, B, R, R, B, R, B, B, R
- B, B, R, R, B, R, B, R, B
- B, B, R, R, B, R, B, R, R
- B, B, R, R, B, R, R, B, B
- B, B, R, R, B, R, R, B, R
- B, B, R, R, B, R, R, R, B

- B, B, R, R, B, R, R, R, R
- B, B, R, R, R, B, B, B, B
- B, B, R, R, R, B, B, B, R
- B, B, R, R, R, B, B, R, B
- B, B, R, R, R, B, B, R, R
- B, B, R, R, R, B, R, B, B
- B, B, R, R, R, B, R, B, R
- B, B, R, R, R, B, R, R, B
- B, B, R, R, R, B, R, R, R
- B, B, R, R, R, R, B, B, B
- B, B, R, R, R, R, B, B, R
- B, B, R, R, R, R, B, R, B
- B, B, R, R, R, R, B, R, R
- B, B, R, R, R, R, R, B, B
- B, B, R, R, R, R, R, B, R
- B, B, R, R, R, R, R, R, B
- B, B, R, R, R, R, R, R, R
- B, R, B, B, B, B, B, B, B
- B, R, B, B, B, B, B, B, R

- B, R, B, B, B, B, B, R, B
- B, R, B, B, B, B, B, R, R
- B, R, B, B, B, B, R, B, B
- B, R, B, B, B, B, R, B, R
- B, R, B, B, B, B, R, R, B
- B, R, B, B, B, B, R, R, R
- B, R, B, B, B, R, B, B, B
- B, R, B, B, B, R, B, B, R
- B, R, B, B, B, R, B, R, B
- B, R, B, B, B, R, B, R, R
- B, R, B, B, B, R, R, B, B
- B, R, B, B, B, R, R, B, R
- B, R, B, B, B, R, R, R, B
- B, R, B, B, B, R, R, R, R
- B, R, B, B, R, B, B, B, B
- B, R, B, B, R, B, B, B, R
- B, R, B, B, R, B, B, R, B
- B, R, B, B, R, B, B, R, R

- B, R, B, B, R, B, R, B, B
- B, R, B, B, R, B, R, B, R
- B, R, B, B, R, B, R, R, B
- B, R, B, B, R, B, R, R, R
- B, R, B, B, R, R, B, B, B
- B, R, B, B, R, R, B, B, R
- B, R, B, B, R, R, B, R, B
- B, R, B, B, R, R, B, R, R
- B, R, B, B, R, R, R, B, B
- B, R, B, B, R, R, R, B, R
- B, R, B, B, R, R, R, R, B
- B, R, B, B, R, R, R, R, R
- B, R, B, R, B, B, B, B, B
- B, R, B, R, B, B, B, B, R
- B, R, B, R, B, B, B, R, B
- B, R, B, R, B, B, B, R, R
- B, R, B, R, B, B, R, B, B
- B, R, B, R, B, B, R, B, R
- B, R, B, R, B, B, R, R, B

- B, R, B, R, B, B, R, R, R
- B, R, B, R, B, R, B, B, B
- B, R, B, R, B, R, B, B, R
- B, R, B, R, B, R, B, R, B
- B, R, B, R, B, R, B, R, R
- B, R, B, R, B, R, R, B, B
- B, R, B, R, B, R, R, B, R
- B, R, B, R, B, R, R, R, B
- B, R, B, R, B, R, R, R, R
- B, R, B, R, R, B, B, B, B
- B, R, B, R, R, B, B, B, R
- B, R, B, R, R, B, B, R, B
- B, R, B, R, R, B, B, R, R
- B, R, B, R, R, B, R, B, B
- B, R, B, R, R, B, R, B, R
- B, R, B, R, R, B, R, R, B
- B, R, B, R, R, B, R, R, R
- B, R, B, R, R, R, B, B, B

- B, R, B, R, R, R, B, B, R
- B, R, B, R, R, R, B, R, B
- B, R, B, R, R, R, B, R, R
- B, R, B, R, R, R, R, B, B
- B, R, B, R, R, R, R, B, R
- B, R, B, R, R, R, R, R, B
- B, R, B, R, R, R, R, R, R
- B, R, R, B, B, B, B, B, B
- B, R, R, B, B, B, B, B, R
- B, R, R, B, B, B, B, R, B
- B, R, R, B, B, B, B, R, R
- B, R, R, B, B, B, R, B, B
- B, R, R, B, B, B, R, B, R
- B, R, R, B, B, B, R, R, B
- B, R, R, B, B, B, R, R, R
- B, R, R, B, B, R, B, B, B
- B, R, R, B, B, R, B, B, R
- B, R, R, B, B, R, B, R, B
- B, R, R, B, B, R, B, R, R
- B, R, R, B, B, R, R, B, B
- B, R, R, B, B, R, R, B, R
- B, R, R, B, B, R, R, R, B
- B, R, R, B, B, R, R, R, R
- B, R, R, B, R, B, B, B, B
- B, R, R, B, R, B, B, B, R
- B, R, R, B, R, B, B, R, B
- B, R, R, B, R, B, B, R, R
- B, R, R, B, R, B, R, B, B
- B, R, R, B, R, B, R, B, R
- B, R, R, B, R, B, R, R, B
- B, R, R, B, R, B, R, R, R
- B, R, R, B, R, R, B, B, B
- B, R, R, B, R, R, B, B, R
- B, R, R, B, R, R, B, R, B
- B, R, R, B, R, R, B, R, R
- B, R, R, B, R, R, R, B, B
- B, R, R, B, R, R, R, B, R

- B, R, R, B, R, R, R, R, B
- B, R, R, B, R, R, R, R, R
- B, R, R, R, B, B, B, B, B
- B, R, R, R, B, B, B, B, R
- B, R, R, R, B, B, B, R, B
- B, R, R, R, B, B, B, R, R
- B, R, R, R, B, B, R, B, B
- B, R, R, R, B, B, R, B, R
- B, R, R, R, B, B, R, R, B
- B, R, R, R, B, B, R, R, R
- B, R, R, R, B, R, B, B, B
- B, R, R, R, B, R, B, B, R
- B, R, R, R, B, R, B, R, B
- B, R, R, R, B, R, B, R, R
- B, R, R, R, B, R, R, B, B
- B, R, R, R, B, R, R, B, R
- B, R, R, R, B, R, R, R, B
- B, R, R, R, B, R, R, R, R
- B, R, R, R, R, B, B, B, B
- B, R, R, R, R, B, B, B, R
- B, R, R, R, R, B, B, R, B
- B, R, R, R, R, B, B, R, R
- B, R, R, R, R, B, R, B, B
- B, R, R, R, R, B, R, B, R
- B, R, R, R, R, B, R, R, B
- B, R, R, R, R, B, R, R, R
- B, R, R, R, R, R, B, B, B
- B, R, R, R, R, R, B, B, R
- B, R, R, R, R, R, B, R, B
- B, R, R, R, R, R, B, R, R
- B, R, R, R, R, R, R, B, B
- B, R, R, R, R, R, R, B, R
- B, R, R, R, R, R, R, R, B
- B, R, R, R, R, R, R, R, R
- R, B, B, B, B, B, B, B, B
- R, B, B, B, B, B, B, B, R
- R, B, B, B, B, B, B, R, B

- R, B, B, B, B, B, B, R, R
- R, B, B, B, B, B, R, B, B
- R, B, B, B, B, B, R, B, R
- R, B, B, B, B, B, R, R, B
- R, B, B, B, B, B, R, R, R
- R, B, B, B, B, R, B, B, B
- R, B, B, B, B, R, B, B, R
- R, B, B, B, B, R, B, R, B
- R, B, B, B, B, R, B, R, R
- R, B, B, B, B, R, R, B, B
- R, B, B, B, B, R, R, B, R
- R, B, B, B, B, R, R, R, B
- R, B, B, B, B, R, R, R, R
- R, B, B, B, R, B, B, B, B
- R, B, B, B, R, B, B, B, R
- R, B, B, B, R, B, B, R, B
- R, B, B, B, R, B, B, R, R
- R, B, B, B, R, B, R, B, B
- R, B, B, B, R, B, R, B, R
- R, B, B, B, R, B, R, R, B
- R, B, B, B, R, B, R, R, R
- R, B, B, B, R, R, B, B, B
- R, B, B, B, R, R, B, B, R
- R, B, B, B, R, R, B, R, B
- R, B, B, B, R, R, B, R, R
- R, B, B, B, R, R, R, B, B
- R, B, B, B, R, R, R, B, R
- R, B, B, B, R, R, R, R, B
- R, B, B, B, R, R, R, R, R
- R, B, B, R, B, B, B, B, B
- R, B, B, R, B, B, B, B, R
- R, B, B, R, B, B, B, R, B
- R, B, B, R, B, B, B, R, R
- R, B, B, R, B, B, R, B, B
- R, B, B, R, B, B, R, B, R
- R, B, B, R, B, B, R, R, B
- R, B, B, R, B, B, R, R, R

- R, B, B, R, B, R, B, B, B
- R, B, B, R, B, R, B, B, R
- R, B, B, R, B, R, B, R, B
- R, B, B, R, B, R, B, R, R
- R, B, B, R, B, R, R, B, B
- R, B, B, R, B, R, R, B, R
- R, B, B, R, B, R, R, R, B
- R, B, B, R, B, R, R, R, R
- R, B, B, R, R, B, B, B, B
- R, B, B, R, R, B, B, B, R
- R, B, B, R, R, B, B, R, B
- R, B, B, R, R, B, B, R, R
- R, B, B, R, R, B, R, B, B
- R, B, B, R, R, B, R, B, R
- R, B, B, R, R, B, R, R, B
- R, B, B, R, R, B, R, R, R
- R, B, B, R, R, R, B, B, B
- R, B, B, R, R, R, B, B, R
- R, B, B, R, R, R, B, R, B

- R, B, B, R, R, R, B, R, R
- R, B, B, R, R, R, R, B, B
- R, B, B, R, R, R, R, B, R
- R, B, B, R, R, R, R, R, B
- R, B, B, R, R, R, R, R, R
- R, B, R, B, B, B, B, B, B
- R, B, R, B, B, B, B, B, R
- R, B, R, B, B, B, B, R, B
- R, B, R, B, B, B, B, R, R
- R, B, R, B, B, B, R, B, B
- R, B, R, B, B, B, R, B, R
- R, B, R, B, B, B, R, R, B
- R, B, R, B, B, B, R, R, R
- R, B, R, B, B, R, B, B, B
- R, B, R, B, B, R, B, B, R
- R, B, R, B, B, R, B, R, B
- R, B, R, B, B, R, B, R, R
- R, B, R, B, B, R, R, B, B

- R, B, R, B, B, R, R, B, R
- R, B, R, B, B, R, R, R, B
- R, B, R, B, B, R, R, R, R
- R, B, R, B, R, B, B, B, B
- R, B, R, B, R, B, B, B, R
- R, B, R, B, R, B, B, R, B
- R, B, R, B, R, B, B, R, R
- R, B, R, B, R, B, R, B, B
- R, B, R, B, R, B, R, B, R
- R, B, R, B, R, B, R, R, B
- R, B, R, B, R, B, R, R, R
- R, B, R, B, R, R, B, B, B
- R, B, R, B, R, R, B, B, R
- R, B, R, B, R, R, B, R, B
- R, B, R, B, R, R, B, R, R
- R, B, R, B, R, R, R, B, B
- R, B, R, B, R, R, R, B, R
- R, B, R, B, R, R, R, R, B
- R, B, R, B, R, R, R, R, R

- R, B, R, R, B, B, B, B, B
- R, B, R, R, B, B, B, B, R
- R, B, R, R, B, B, B, R, B
- R, B, R, R, B, B, B, R, R
- R, B, R, R, B, B, R, B, B
- R, B, R, R, B, B, R, B, R
- R, B, R, R, B, B, R, R, B
- R, B, R, R, B, B, R, R, R
- R, B, R, R, B, R, B, B, B
- R, B, R, R, B, R, B, B, R
- R, B, R, R, B, R, B, R, B
- R, B, R, R, B, R, B, R, R
- R, B, R, R, B, R, R, B, B
- R, B, R, R, B, R, R, B, R
- R, B, R, R, B, R, R, R, B
- R, B, R, R, B, R, R, R, R
- R, B, R, R, R, B, B, B, B
- R, B, R, R, R, B, B, B, R

- R, B, R, R, R, B, B, R, B
- R, B, R, R, R, B, B, R, R
- R, B, R, R, R, B, R, B, B
- R, B, R, R, R, B, R, B, R
- R, B, R, R, R, B, R, R, B
- R, B, R, R, R, B, R, R, R
- R, B, R, R, R, R, B, B, B
- R, B, R, R, R, R, B, B, R
- R, B, R, R, R, R, B, R, B
- R, B, R, R, R, R, B, R, R
- R, B, R, R, R, R, R, B, B
- R, B, R, R, R, R, R, B, R
- R, B, R, R, R, R, R, R, B
- R, B, R, R, R, R, R, R, R
- R, R, B, B, B, B, B, B, B
- R, R, B, B, B, B, B, B, R
- R, R, B, B, B, B, B, R, B
- R, R, B, B, B, B, B, R, R
- R, R, B, B, B, B, R, B, B
- R, R, B, B, B, B, R, B, R
- R, R, B, B, B, B, R, R, B
- R, R, B, B, B, B, R, R, R
- R, R, B, B, B, R, B, B, B
- R, R, B, B, B, R, B, B, R
- R, R, B, B, B, R, B, R, B
- R, R, B, B, B, R, B, R, R
- R, R, B, B, B, R, R, B, B
- R, R, B, B, B, R, R, B, R
- R, R, B, B, B, R, R, R, B
- R, R, B, B, B, R, R, R, R
- R, R, B, B, R, B, B, B, B
- R, R, B, B, R, B, B, B, R
- R, R, B, B, R, B, B, R, B
- R, R, B, B, R, B, B, R, R
- R, R, B, B, R, B, R, B, B
- R, R, B, B, R, B, R, B, R
- R, R, B, B, R, B, R, R, B

- R, R, B, B, R, B, R, R, R
- R, R, B, B, R, R, B, B, B
- R, R, B, B, R, R, B, B, R
- R, R, B, B, R, R, B, R, B
- R, R, B, B, R, R, B, R, R
- R, R, B, B, R, R, R, B, B
- R, R, B, B, R, R, R, B, R
- R, R, B, B, R, R, R, R, B
- R, R, B, B, R, R, R, R, R
- R, R, B, R, B, B, B, B, B
- R, R, B, R, B, B, B, B, R
- R, R, B, R, B, B, B, R, B
- R, R, B, R, B, B, B, R, R
- R, R, B, R, B, B, R, B, B
- R, R, B, R, B, B, R, B, R
- R, R, B, R, B, B, R, R, B
- R, R, B, R, B, B, R, R, R
- R, R, B, R, B, R, B, B, B
- R, R, B, R, B, R, B, B, R
- R, R, B, R, B, R, B, R, B
- R, R, B, R, B, R, B, R, R
- R, R, B, R, B, R, R, B, B
- R, R, B, R, B, R, R, B, R
- R, R, B, R, B, R, R, R, B
- R, R, B, R, B, R, R, R, R
- R, R, B, R, R, B, B, B, B
- R, R, B, R, R, B, B, B, R
- R, R, B, R, R, B, B, R, B
- R, R, B, R, R, B, B, R, R
- R, R, B, R, R, B, R, B, B
- R, R, B, R, R, B, R, B, R
- R, R, B, R, R, B, R, R, B
- R, R, B, R, R, B, R, R, R
- R, R, B, R, R, R, B, B, B
- R, R, B, R, R, R, B, B, R
- R, R, B, R, R, R, B, R, B
- R, R, B, R, R, R, B, R, R

- R, R, B, R, R, R, R, B, B
- R, R, B, R, R, R, R, B, R
- R, R, B, R, R, R, R, R, B
- R, R, B, R, R, R, R, R, R
- R, R, R, B, B, B, B, B, B
- R, R, R, B, B, B, B, B, R
- R, R, R, B, B, B, B, R, B
- R, R, R, B, B, B, B, R, R
- R, R, R, B, B, B, R, B, B
- R, R, R, B, B, B, R, B, R
- R, R, R, B, B, B, R, R, B
- R, R, R, B, B, B, R, R, R
- R, R, R, B, B, R, B, B, B
- R, R, R, B, B, R, B, B, R
- R, R, R, B, B, R, B, R, B
- R, R, R, B, B, R, B, R, R
- R, R, R, B, B, R, R, B, B
- R, R, R, B, B, R, R, B, R
- R, R, R, B, B, R, R, R, B
- R, R, R, B, B, R, R, R, R
- R, R, R, B, R, B, B, B, B
- R, R, R, B, R, B, B, B, R
- R, R, R, B, R, B, B, R, B
- R, R, R, B, R, B, B, R, R
- R, R, R, B, R, B, R, B, B
- R, R, R, B, R, B, R, B, R
- R, R, R, B, R, B, R, R, B
- R, R, R, B, R, B, R, R, R
- R, R, R, B, R, R, B, B, B
- R, R, R, B, R, R, B, B, R
- R, R, R, B, R, R, B, R, B
- R, R, R, B, R, R, B, R, R
- R, R, R, B, R, R, R, B, B
- R, R, R, B, R, R, R, B, R
- R, R, R, B, R, R, R, R, B
- R, R, R, B, R, R, R, R, R
- R, R, R, R, B, B, B, B, B

- R, R, R, R, B, B, B, B, R
- R, R, R, R, B, B, B, R, B
- R, R, R, R, B, B, B, R, R
- R, R, R, R, B, B, R, B, B
- R, R, R, R, B, B, R, B, R
- R, R, R, R, B, B, R, R, B
- R, R, R, R, B, B, R, R, R
- R, R, R, R, B, R, B, B, B
- R, R, R, R, B, R, B, B, R
- R, R, R, R, B, R, B, R, B
- R, R, R, R, B, R, B, R, R
- R, R, R, R, B, R, R, B, B
- R, R, R, R, B, R, R, B, R
- R, R, R, R, B, R, R, R, B
- R, R, R, R, B, R, R, R, R
- R, R, R, R, R, B, B, B, B
- R, R, R, R, R, B, B, B, R
- R, R, R, R, R, B, B, R, B
- R, R, R, R, R, B, B, R, R
- R, R, R, R, R, B, R, B, B
- R, R, R, R, R, B, R, B, R
- R, R, R, R, R, B, R, R, B
- R, R, R, R, R, B, R, R, R
- R, R, R, R, R, R, B, B, B
- R, R, R, R, R, R, B, B, R
- R, R, R, R, R, R, B, R, B
- R, R, R, R, R, R, B, R, R
- R, R, R, R, R, R, R, B, B
- R, R, R, R, R, R, R, B, R
- R, R, R, R, R, R, R, R, B
- R, R, R, R, R, R, R, R, R

Proposition

Six personnes sont dans une pièce : il en existe

- soit trois qui se connaissent mutuellement,
- soit trois qui sont des parfaits inconnus.

Proposition

Six personnes sont dans une pièce : il en existe

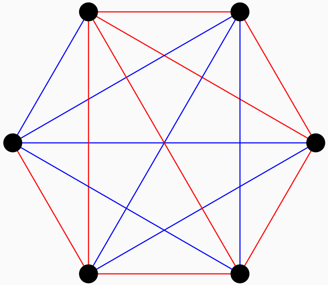
- soit trois qui se connaissent mutuellement,
- soit trois qui sont des parfaits inconnus.

N personnes dans une salle

3 inconnus ou 3 connus

$N = 6$

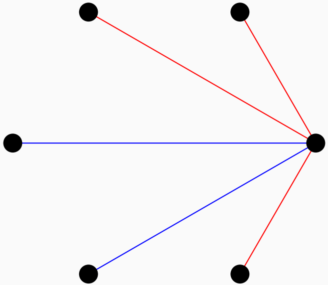
On va représenter la situation par un graphe.
Chaque personne est un sommet.
On indique une arête rouge entre deux sommets qui correspondent à des personnes se connaissant, une arête bleue sinon.



Il s'agit alors de prouver qu'il existe un triangle ≪ monochrome ≫ quel que soit le coloriage de ce graphe.

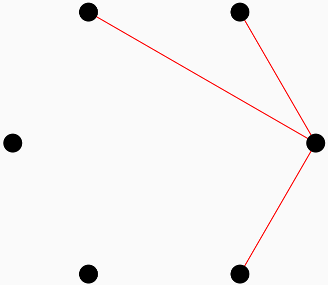
Preuve

Limitons-nous dans un premier temps à l'un des personnages.
Il y a 5 arêtes partant de ce sommet coloriées avec 2 couleurs : il en existe donc au moins 3 de la même couleur, par exemple, rouge.



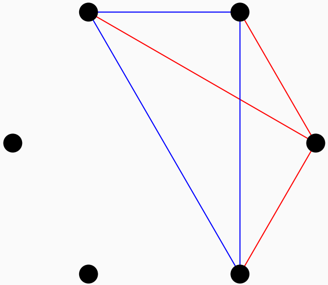
Preuve

Limitons-nous dans un premier temps à l'un des personnages.
Il y a 5 arêtes partant de ce sommet coloriées avec 2 couleurs : il en existe donc au moins 3 de la même couleur, par exemple, rouge.



Preuve

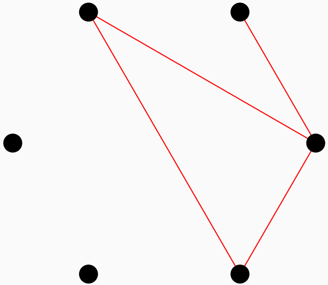
Limitons-nous dans un premier temps à l'un des personnages.
Il y a 5 arêtes partant de ce sommet coloriées avec 2 couleurs : il en existe donc au moins 3 de la même couleur, par exemple, rouge.



▷ Si ces trois sommets sont reliés par des arêtes bleues, alors il y a un triangle bleu.

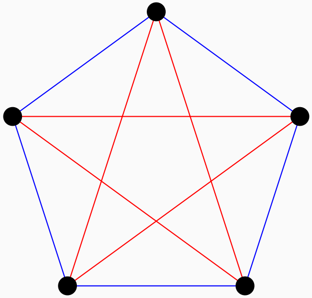
Preuve

Limitons-nous dans un premier temps à l'un des personnages.
Il y a 5 arêtes partant de ce sommet coloriées avec 2 couleurs : il en existe donc au moins 3 de la même couleur, par exemple, rouge.



▷ Si ces trois sommets sont reliés par des arêtes bleues, alors il y a un triangle bleu.
▷ Sinon deux sommets sont reliés par une arête rouge et avec le sommet de départ forment un triangle rouge.

En revanche, le théorème n'est plus toujours vrai pour seulement cinq personnes comme on peut le voir avec la configuration suivante :



On peut généraliser.

Proposition

Neuf personnes sont dans une pièce : il en existe trois qui se sont serré la main mutuellement ou quatre telles qu'aucune d'entre elles n'a serré la main de l'une des autres.

Proposition

Parmi 9 points du plan (en position générale), on peut trouver 5 qui forme un polygone convexe.

Proposition

Parmi 9 points du plan (en position générale), on peut trouver 5 qui forme un polygone convexe.

Proposition

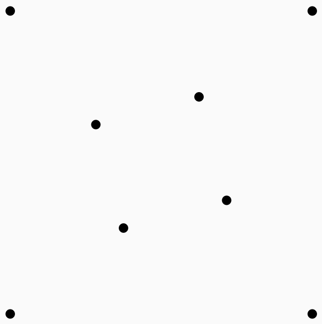
Parmi 9 points du plan (en position générale), on peut trouver 5 qui forme un polygone convexe.

N points du plan

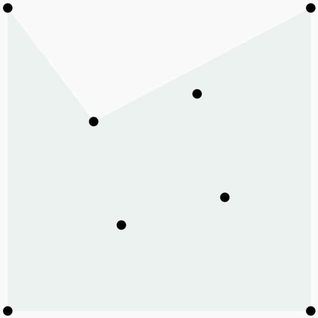
Sommets d'un pentagone convexe

9

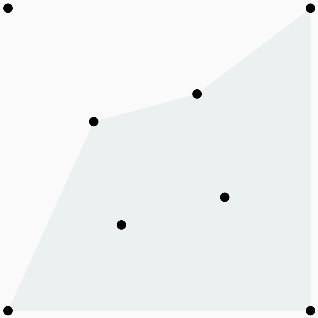
Parmi les 8 points suivants, il n'y en a pas 5 qui sont les sommets d'un polygone convexe :



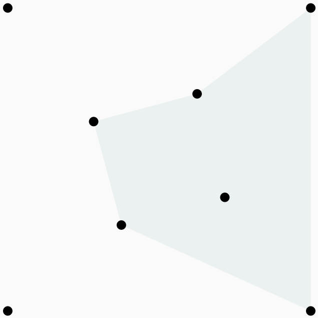
Parmi les 8 points suivants, il n'y en a pas 5 qui sont les sommets d'un polygone convexe :



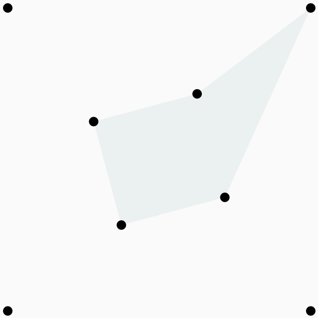
Parmi les 8 points suivants, il n'y en a pas 5 qui sont les sommets d'un polygone convexe :



Parmi les 8 points suivants, il n'y en a pas 5 qui sont les sommets d'un polygone convexe :



Parmi les 8 points suivants, il n'y en a pas 5 qui sont les sommets d'un polygone convexe :



On peut généraliser.

Théorème

Soit $k \geq 3$ fixé.
Il existe un entier N tel que parmi tout ensemble de $n \geq N$ points du plan (en position générale), on peut trouver k points qui sont les sommets d'un polygone convexe.

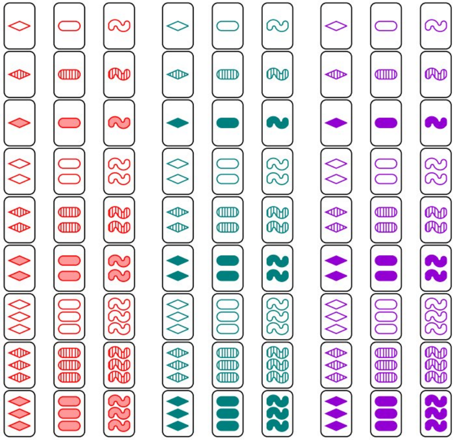
Esther Klein (20 février 1910 – 28 août 2005),
George Szekeres (29 mai 1911 – 28 août 2005),
Pál Erdős (26 mars 1913 - 20 septembre 1996)

- Hongrois
- Mathématiciens (combinatoire)

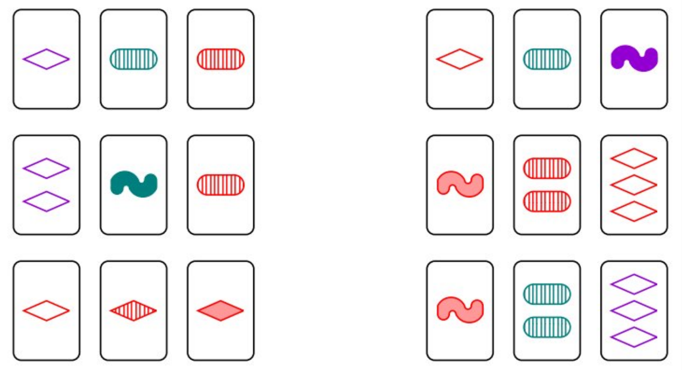
Esther Szekeres (20 février 1910 – 28 août 2005),
George Szekeres (29 mai 1911 – 28 août 2005),
Pál Erdős (26 mars 1913 - 20 septembre 1996)

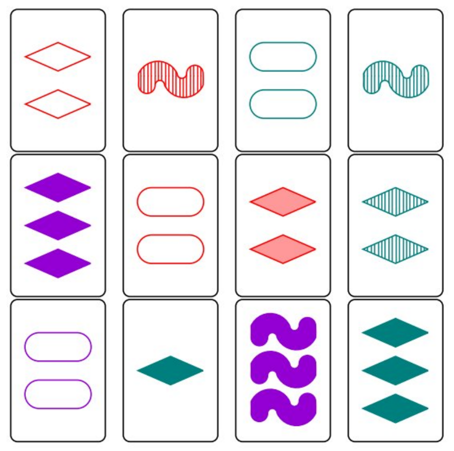
Le jeu Set comporte 81 cartes et sur chacune d'entre elles, on trouve

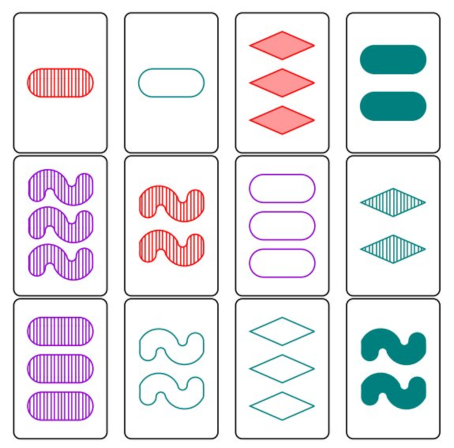
- des motifs : losange, ovale ou vague
- en nombre : 1, 2 ou 3
- de couleur : verte, rouge ou violette
- de texture : pleine, évidée ou hachurée

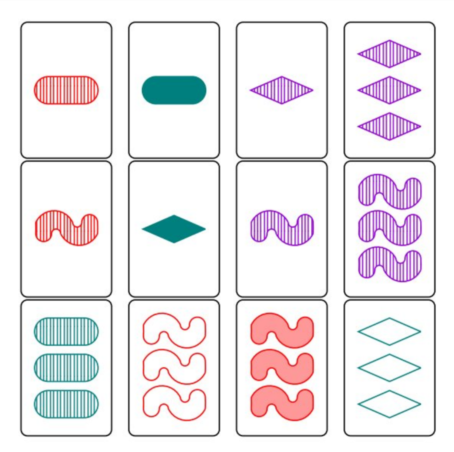


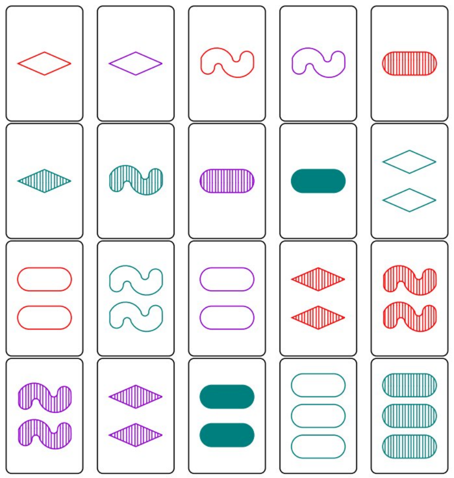
On pose douze cartes sur la table ; chaque joueur doit trouver un lot de 3 cartes, appelé set, tel que, pour chacun des quatre critères, les trois cartes ont la même valeur ou ont toutes des valeurs différentes.











Proposition

Parmi 21 cartes de ce jeu, il y a toujours au moins un set.

Proposition

Parmi 21 cartes de ce jeu, il y a toujours au moins un set.

N cartes sur la table

set

$N = 21$

Principe des tiroirs

Proposition

Fixons

- c le nombre de couleurs
- ℓ un nombre de points

Alors, il existe un entier N tel que dans tout coloriage de N points avec c couleurs, il existe (au moins) ℓ points coloriés de la même couleur.

Principe des tiroirs

Proposition

Fixons

- c le nombre de couleurs
- ℓ un nombre de points

Alors, il existe un entier N tel que dans tout coloriage de N points avec c couleurs, il existe (au moins) ℓ points coloriés de la même couleur.

coloriage de N points avec c couleurs

ℓ points de la même couleurs

$$N = c(\ell - 1) + 1$$

Preuve

S'il n'y a pas ℓ points coloriés de la même couleur, cela signifie qu'il y a au plus $\ell - 1$ points de chaque couleur donc $N \leq c(\ell - 1)$.

Ce théorème s'appelle selon les pays : Le Principe des tiroirs, *Das Schubfachprinzip*, *The Pigeonhole Principle*.

Proposition

Fixons

- c le nombre de tiroirs
- ℓ un nombre

Alors, il existe un entier N tel que, pour tout rangement de N objets dans c tiroirs, il existe (au moins) ℓ objets dans le même tiroir.

Exercice

Montrer que parmi 5 points sur le quadrillage suivant, il en existe 2 dont le milieu est aussi sur le quadrillage.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (13 février 1805 - 5 mai 1859)

- Allemand
- Mathématicien (arithmétique, analyse harmonique...)
- Beau-frère du compositeur Felix Mendelssohn

Théorème de Ramsey

Théorème

Soit $p \geq 2$ et $q \geq 2$ fixés.
Il existe un entier N tel que tout coloriage du graphe complet à $n \geq N$ sommets en deux couleurs rouge et bleu contient soit un sous-graphe complet rouge à p sommets, soit un sous-graphe complet bleu à q sommets.

Notons $R(p, q)$ le plus petit entier N vérifiant la conclusion de ce théorème.

Proposition

Pour tout $q \geq 2$,

$$R(2, q) = q.$$

D'après le raisonnement de l'introduction,

Proposition

$$R(3, 3) = 6.$$

Voici toutes les valeurs connues de $R(p,q)$

	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25				
5	14	25					
6	18						
7	23						
8	28						
9	36						

Suppose aliens invade the Earth and threaten to obliterate it in a year's time unless human beings can find the Ramsey number for red five and blue five. We could marshal the world's best minds and fastest computers, and within a year we could probably calculate the value.
If the Aliens demanded the Ramsey number for red six and blue six, we would have no choice but to launch a preemptive attack.

Paul Erdös

On montre le résultat par récurrence sur $p+q$. Voilà l'étape d'hérédité.

Preuve

Supposons établie l'existence de $R(p-1,q)$ et de $R(p,q-1)$.

Posons $N = R(p-1,q) + R(p,q-1)$ et considérons un graphe complet à N sommets coloriés avec deux couleurs.

Un sommet x admet $N-1$ voisins : soit il admet (au moins) $R(p-1,q)$ arêtes rouges, soit il admet (au moins) $R(p,q-1)$ arêtes bleues. Supposons, sans perte de généralité, que nous sommes dans le premier cas.

Par hypothèse de récurrence, parmi les voisins de x, on a

- soit un sous-graphe complet bleu à q sommets.
- soit un sous-graphe complet rouge à $p-1$ sommets : en ajoutant le sommet x, on obtient un sous-graphe complet rouge à p sommets du graphe de départ.

Corollaire

Pour tous $p,\ q \geq 3$,

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1).$$

Ce corollaire permet de calculer quelques petites valeurs mais s'avère inopérant pour un calcul systématique.

Voici (sans démonstration) quelques bornes

Proposition

- (Erdös-Szekeres)

$$R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}.$$

- (Rödl-Thomason, 1988)

$$R(p, p) \leq C \frac{\binom{2p-2}{p-1}}{\sqrt[3]{p-1}}.$$

Frank Plumpton Ramsey (22 février 1903 - 19 janvier 1930)

- Britannique
- Logicien, économiste, mathématicien
- Mort d'une maladie du foie à 26 ans
- Frère de l'archevêque de Cantorbury

Théorème de van der Waerden

Théorème

Soit $c \geq 2$ et $\ell \geq 2$ fixés.
Il existe un entier N tel que, pour tout coloriage de $E_n = \{1, \ldots, n\}$ pour $n \geq N$ avec c couleurs, il existe une progression arithmétique de longueur ℓ monochrome.

Notons $W(\ell, c)$ le plus petit entier N vérifiant la conclusion de ce théorème.

Voici les valeurs connues (la longueur ℓ est en abscisse, le nombre de couleur c est en ordonnée) :

	2	3	4	5	6
2	3	9	35	178	1132
3	4	27	293		
4	5	76			
5	6				

Le valeur 293 a été obtenue en 2012 par Michal Kouril.

Proposition

Pour tout $c \geq 2$,

$$W(2, c) = c + 1.$$

Pour la démonstration, introduisons la notation suivante.

Notons $W(k, \ell, c)$ le plus petit entier N (s'il existe) tel que $E_N = \{1, \dots, N\}$ admette

- soit une progression arithmétique monochrome de longueur $\ell + 1$,
- soit k progressions arithmétiques monochromes de longueur ℓ de couleurs différentes et se prolongeant en un même entier.

L'idée générale de la preuve est de montrer « $\forall c,\ W(\ell, c) < \infty$ » par récurrence sur ℓ.

- L'initialisation pour $\ell = 2$ est élémentaire car $W(2, c) = c + 1$.
- Pour la phase d'hérédité (c'est-à-dire le passage de ℓ à $\ell + 1$), on établit par récurrence sur $k \leq c$ que $W(k, \ell, c) < \infty$.
  Il suffit ensuite d'appliquer ce résultat pour $k = c$ afin de prolonger l'une des progressions arithmétiques de longueur ℓ en une progression arithmétique de longueur $\ell + 1$ en conservant le caractère monochrome.

Concentrons-nous sur l'étape d'hérédité de la seconde récurrence.

Soit $\ell \geq 2$ tel que, pour tout $c \geq 2$, $W(\ell, c) < \infty$ puis considérons $k < c$ tel que $W(k, \ell, c) < \infty$.

Posons
$$N = 2W(k, \ell, c)W(\ell, c^{W(k,\ell,c)}).$$

On découpe $E_N = \{1, \ldots, N\}$ en $2W(\ell, c^{W(k,\ell,c)})$ intervalles de longueur $W(k, \ell, c)$:
$$I_1, I_2, \ldots, I_{2W(\ell,c^{W(k,\ell,c)})}.$$

La ≪ couleur ≫ d'un intervalle est le $W(k,\ell,c)$-uplet des couleurs des entiers que le composent.

Il y a ainsi $c^{W(k,\ell,c)}$ ≪ couleurs ≫ possibles pour ces intervalles.

Par définition de $W(\ell, c^{W(k,\ell,c)})$, il existe ℓ intervalles en progression arithmétique de même ≪ couleur ≫ :

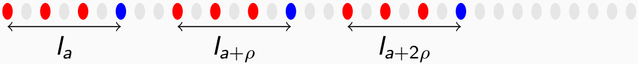
$$I_a,\ I_{a+\rho},\ \ldots, I_{a+(\ell-1)\rho}$$

avec $a+(\ell-1)\rho \leq W(\ell, c^{W(k,\ell,c)})$.

Si l'un de ces intervalles contient une progression arithmétique de longueur $\ell + 1$ monochrome, l'étape de récurrence est terminée.

Sinon, par définition de $W(k, \ell, c)$, I_a contient k progressions arithmétiques monochromes de longueur ℓ de couleurs différentes et se prolongeant en un même entier.

Voici une illustration avec $k = 3$ intervalles en progression arithmétique et de même « coloration » :



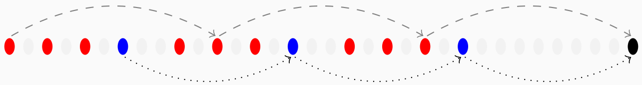
Dans chaque intervalle, on a représenté l'une des progressions arithmétiques de longueur $\ell = 3$ (en rouge) et le point commun de prolongement de chaque progression (en bleu).

Considérons l'une des progressions monochromes b, $b+r$, ..., $b+(\ell-1)r$ dans I_a.

On remarque alors que

- la suite arithmétique issue de b, de raison $\rho + r$ et de longueur ℓ est monochrome
- la suite arithmétique issue de $b + \ell r$, de raison ρ et de longueur ℓ est monochrome
- ces deux suites se prolongent en un même point

$$b + \ell(\rho + r) = (b + \ell r) + \ell\rho.$$



Avec ces suites des points de prolongement, on a obtenu une $k+1$ progression arithmétique monochrome ayant le même point de prolongement ce qui termine l'étape difficile de la preuve.

Cette démonstration donne la majoration suivante.

Proposition

$$W(3,2) \leq 780.$$

On remarque que cette borne est peu précise puisque l'on a montré que $W(3,2) = 9$.

Asymptotiquement la meilleure majoration obtenue est due à Timothy Gowers.

Proposition

Pour tout $\ell \geq 2$,

$$W(\ell, 2) \leq 2^{2^{2^{2^{2^{\ell+9}}}}}.$$

Bartel Leendert van der Waerden (2 février 1903 - 12 janvier 1996)

- Hollandais
- Mathématicien (algébriste)
- A résolu un problème de Hilbert (le quinzième)


Participez au défi mathématique de Roger Mansuy
La Recherche
La Recherche
NUMÉRO DOUBLE
www.larecherche.fr
CHAOS
et systèmes complexes
Des bancs de poissons
à la physique quantique…
M 01108 - 537 - F: 7,90 € - RD
JUILLET-AOÛT 2018 - BEL 8,90 € - LUX 8,90 € - ALL 9,20 € - ESP 8,90 € - GR 8,90 € - ITA 8,90 € - DOM 8,90 €
PORT.CONT 8,90 € - CAN 12,99 $ CAN - CH 13,90 FS - MAR 80 DH - TUN 9,20 TND - TOM SURFACE 1100 XPF - TOM AVION 1800 XPF


Participez au défi mathématique de Roger Mansuy
La Recherche
La Recherche
NUMÉRO DOUBLE
www.larecherche.fr

Colorier le plus grand quadrillage carré avec deux couleurs sans avoir quatre points de la même couleur délimitant un carré.

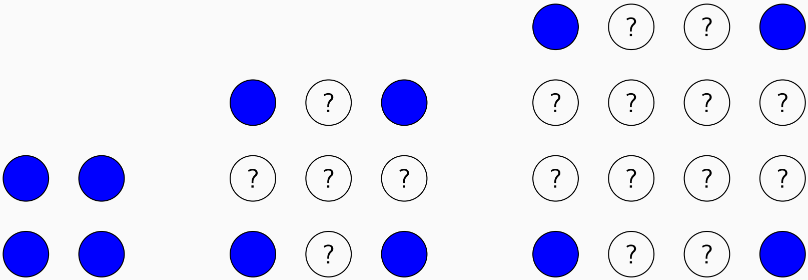
Colorier le plus grand quadrillage carré avec deux couleurs sans avoir quatre points de la même couleur délimitant un carré.

Coloriage d'un quadrillage $N \times N$ avec 2 couleurs

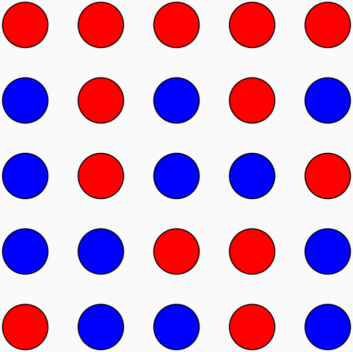
Carré aux coins de la même couleur

???

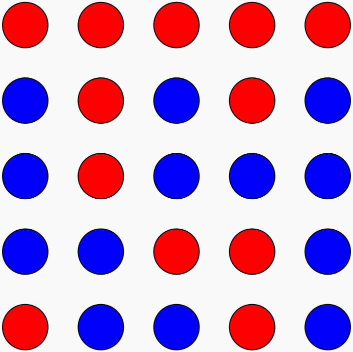
Donnons quelques exemples de configurations interdites :

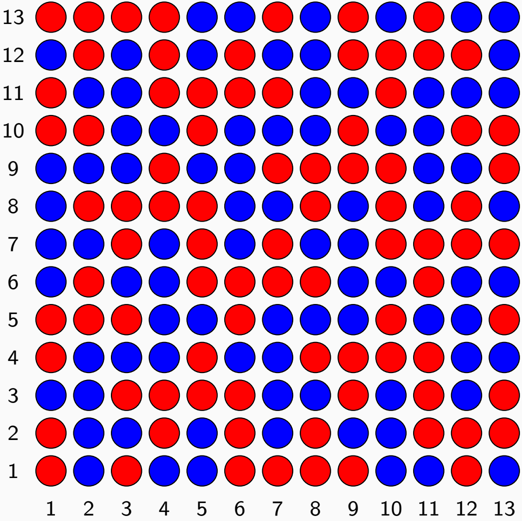


Voici une proposition (correcte) de taille 5 donnée dans la revue :



Voici une proposition de taille 5 (en changeant la couleur d'un point dans la précédente) :




13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

Merci