

XIX^e Festival d'astronomie de Fleurance

FIL NOIR ASTROMATH



L'univers comme un système dynamique

Jérôme Perez

Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA
Laboratoire Univers & Théories de l'observatoire de Meudon

Aout 2009



Convention de signe pour la métrique : $-+++$
Indices grecs : 0,1,2,3
Indices latins : 1,2,3
Somme sur les indices répétés haut et bas.

Table des matières

I	L'univers homogène et isotrope : Friedmann	4
1	Équations d'Einstein	5
2	L'univers homogène isotrope	6
2.1	Métrique de Friedmann-Robertson-Lemaître-Walker	6
2.2	Equations de Friedmann	6
3	Système dynamique de l'univers homogène et isotrope	9
3.1	Les équations du système dynamique	9
3.2	Les états d'équilibre de l'univers homogène et isotrope	10
3.2.1	L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^\top$	11
3.2.2	L'univers d'Einstein-de Sitter : $X_2^* = [1, 0]^\top$	11
3.2.3	L'univers de Milne : $X_3^* = [0, 0]^\top$	11
3.3	Stabilité de l'univers homogène et isotrope	11
II	L'univers homogène et anisotrope : Bianchi	13
4	Sections spatiales homogènes	14
4.1	Univers de Bianchi	14
4.2	Formulation BKL	16
4.3	Formulation Hamiltonienne	18
4.3.1	Réduction du terme "cinétique"	19
4.3.2	Terme potentiel	20
4.3.3	Dynamique Hamiltonienne	20
5	Résultats analytiques	22
5.1	Intégrabilité du système de l'Univers homogène	22
5.1.1	Systèmes différentiels autonomes et auto-similaires	22
5.1.2	Exposants de Kovalewskaya et cosmologies anisotropes	23
5.1.3	Compléments algébriques	28
5.2	Quelques solutions analytiques et une conjecture	29
5.2.1	Propriétés du volume de l'Univers	29
5.2.2	Dynamique de l'Univers B_I	30
5.2.3	Dynamique de l'Univers B_{II} ou B_{IV}	32
5.2.4	Conjecture BKL pour l'Univers B_{IX}	34
5.3	Dynamique par le formalisme hamiltonien	35
5.3.1	Super temps et dynamique 2D	35
5.3.2	Comportement initial ou tardif	36
5.3.3	De l'introduction d'un billard cosmique	36
5.3.4	Analyse fine du billard B_{IX}	41
6	Résultats numériques	45
6.1	Modélisation numérique de la dynamique B_{IX} dans le formalisme BKL	45
6.1.1	Test de la conjecture BKL	45
6.1.2	L'attracteur de la dynamique	48
6.2	Modélisation numérique des billards de Bianchi	50
6.2.1	Solutions des équations du mouvement dans les billards statiques	51
6.2.2	Étude numérique de la transition vers le chaos	53
6.2.3	Comparaison d'attracteurs	56

7 Conclusion	59
8 Annexe	60
8.1 Quelques propriétés algébriques	60

Première partie

L'univers homogène et isotrope :
Friedmann

Chapitre 1

Équations d'Einstein

On trouvera de plus amples informations sur ce sujet dans l'ouvrage "Théorie des champs classiques" du même auteur.

Les équations de la dynamique de l'univers sont classiquement obtenues par la variation d'une action contenant deux densités de Lagrangien : l'une \mathcal{L}_c décrit l'état de courbure de l'univers et l'autre \mathcal{L}_m décrit l'énergie impulsion présente dans l'univers, nous avons ainsi

$$S = \frac{1}{\chi} \int (\mathcal{L}_c + \mathcal{L}_m) \sqrt{-g} d^4x \quad (1.1)$$

Le terme $\sqrt{-g}$, racine carrée du déterminant de la métrique considérée, est le jacobien d'une transformation générale de coordonnées. Ce terme assure la covariance de l'élément de volume $\sqrt{-g} d^4x$.

Dans la relativité générale d'Einstein, le lagrangien de courbure est simplement le scalaire de courbure,

$$\mathcal{L}_c = R \quad (1.2)$$

trace du tenseur de Ricci, double contraction du tenseur de courbure de Riemann

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.3)$$

on rappelle que le symbole de Christoffel $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\lambda\mu,\nu}) g^{\nu\sigma}$ permet de calculer les composantes du tenseur de Riemann

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2} [g_{\nu\lambda,\mu,\kappa} + g_{\mu\nu,\lambda,\kappa} - g_{\lambda\kappa,\nu,\mu} + g_{\mu\kappa,\nu,\lambda}] \\ &\quad + g_{\eta\sigma} [\Gamma_{\lambda\nu}^\eta \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma - \Gamma_{\lambda\kappa}^\eta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma] \end{aligned} \quad (1.4)$$

et celles du Ricci

$$R_{\nu\beta} = \Gamma_{\nu\lambda,\beta}^\lambda + \Gamma_{\nu\beta,\lambda}^\lambda + \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma \quad (1.5)$$

La densité de lagrangien de matière dépend directement de la nature de celle ci. C'est à partir de \mathcal{L}_m que l'on forme le tenseur énergie-impulsion

$$T_{\mu\nu} = 2 \left[\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_m \right] \quad (1.6)$$

Le minimum de l'action (1.1) pour des variations de la métrique est atteint pour les équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \quad (1.7)$$

Sous cette forme elles font apparaître le scalaire de courbure R trace du tenseur de Ricci, on peut aussi les écrire en faisant apparaître le scalaire d'énergie impulsion $T := g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$, une ligne de calcul donne

$$R_{\mu\nu} = \chi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \quad (1.8)$$

La constante de couplage est obtenue par limite en champ faible de la théorie, on trouve

$$\chi = 8\pi G/c^4. \quad (1.9)$$

Les équations d'Einstein possèdent une liberté de jauge qui permet de leur rajouter une constante cosmologique dont le statut est un sujet de recherche actuel, ces dernières s'écrivent alors

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

Notons que la valeur de Λ n'est pas fixée par la relativité générale.

Chapitre 2

L'univers homogène isotrope

Supposer que l'espace est homogène et isotrope c'est se placer dans le contexte du modèle standard de la cosmologie. Cette hypothèse qui peut paraître simpliste semble correspondre à l'univers observable sur de grandes échelles.

2.1 Métrique de Friedmann-Robertson-Lemaître-Walker

Si l'on fait l'hypothèse que les sections spatiales de l'espace-temps sont des variétés homogènes isotropes de dimension 3 alors :

- l'isotropie impose que la courbure est la même dans toutes les directions : l'espace est invariant par rotation ;
- l'homogénéité signifie que l'espace admet un ensemble de transformations conservant l'élément de longueur spatial dl^2 et permettant de mettre en relation tout point de l'espace avec tout autre. Ces transformations sont donc des isométries. L'ensemble de ces isométries forme le groupe des déplacements. Dans le cas euclidien par exemple, ce groupe est celui des translations.

La combinaison de ces deux propriétés ne laisse que trois catégories pour les sections spatiales de l'univers : l'hyperplan, l'hypersphère et l'hyperbole toutes trois représentées par l'élément de longueur $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, qui s'écrit explicitement en coordonnées spatiales sphériques

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

les 3 classes d'équivalence de courbure sont :

- $k = +1$: modèle fermé, car le volume de la section spatiale est celui d'une hypersphère donc fini ;
- $k = 0$: modèle à section plate ;
- $k = -1$: modèle ouvert, car le volume de la section spatiale est celui d'une hyperbole donc infini.

En plus du paramètre de courbure k l'autre degré de liberté des espaces homogènes et isotropes est l'existence d'un facteur d'échelle $R(t)$. Ce dernier laisse la possibilité à ces espaces d'avoir une dynamique homothétique : deux points immobiles et qui ne sont soumis à aucune force dans l'univers, peuvent voir leur distance varier du simple fait que ce dernier possède une dynamique décrite par $R(t)$.

2.2 Equations de Friedmann

Il s'agit tout d'abord d'écrire les équations d'Einstein, et donc de calculer les composantes du tenseur de Ricci et du tenseur énergie-impulsion.

Posant

$$f^2(r) = \frac{1}{1 - kr^2}$$

les composantes covariantes non nulles du tenseur métrique sont donc

$$\begin{array}{l} g_{00} = -1 \\ g_{11} = R(t)^2 f^2(r) = \tilde{g}_{rr} \end{array} \left\| \begin{array}{l} g_{22} = r^2 R(t)^2 = \tilde{g}_{\theta\theta} \\ g_{33} = r^2 \sin^2 \theta R(t)^2 = \tilde{g}_{\varphi\varphi} \end{array} \right.$$

en séparant les parties spatiales et temporelles on écrit souvent

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = R(t)^2 dl^2 - dt^2$$

avec

$$dl^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)$$

les seuls christoffels non nuls sont

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^0 &= R \dot{R} \tilde{g}_{ij} \\ \Gamma_{0j}^i &= \frac{\dot{R}}{R} \tilde{g}_{ij}\end{aligned}$$

des calculs très instructifs et semblables à ceux effectués dans le cas de la métrique de Schwarzschild fournissent les composantes covariantes du Ricci, qui dans ce contexte est diagonal

$$\begin{cases} R_{00} = 3\ddot{R}R^{-1} \\ R_{ij} = -\left(\ddot{R}R + 2\dot{R}^2 + 2k\right) \tilde{g}_{ij} \end{cases}$$

Les équations d'Einstein s'écrivent ($c = 1$, et sans la constante cosmologique pour simplifier...)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

Il est commode d'introduire le scalaire d'énergie impulsion $T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, on contracte par $g_{\mu\nu}$

$$R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R = 8\pi GT$$

soit

$$-R = 8\pi GT$$

que l'on réintroduit dans l'équation de départ pour obtenir

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right)$$

pour le fluide parfait de pression P et de densité d'énergie ϵ le tenseur énergie impulsion s'écrit

$$T_{\mu\nu} = Pg_{\mu\nu} + (P + \epsilon) u_\mu u_\nu \quad (2.1)$$

Pour obtenir un tel résultat il faut travailler un peu... Il faut tout d'abord accepter que la densité de lagrangien n'est autre que la densité d'énergie : $\mathcal{L} = \epsilon$, on injecte alors une partie de l'équation d'état d'un gaz parfait $3P = 2\epsilon^1$ ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= 3P - \epsilon = 4P - (P + \epsilon) \\ &= g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}P - (P + \epsilon) \frac{u^\mu u^\nu}{c^2} g_{\mu\nu}\end{aligned}$$

les deux contractions sont explicitées car traîtres! d'autant plus que $c = 1$ n'arrange rien à la compréhension du phénomène pour le novice ... Il ne reste alors plus qu'à utiliser la définition du tenseur énergie impulsion (voir le fameux livre de théorie des champs classiques ...) pour retrouver (2.1).

Quoiqu'il en soit, le calcul donne

$$T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T = \frac{1}{2}(\epsilon - P)g_{\mu\nu} + (P + \epsilon)u_\mu u_\nu$$

Les équations d'Einstein s'écrivent donc pour les 3 composantes spatiales (en notant \dot{x} pour dx/dt)

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k = 4\pi GR^2(\epsilon - P) \quad (2.2)$$

et pour la composante temporelle

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\epsilon + 3P) \quad (2.3)$$

Cette équation est appelée première équation de Friedmann. En éliminant \ddot{R} dans la première équation, on obtient la seconde équation de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G\epsilon}{3}$$

les inconnues du problème sont bien sûr $R(t)$, $P(t)$ et $\epsilon(t)$ ces deux dernières fonctions étant de plus reliées par une équation d'état.

¹Tout le monde sait que pour un tel gaz de N particules monoatomique occupant un volume V on a d'une part $PV = NkT$ et d'autre part $E = \frac{3}{2}NkT$, on obtient alors directement l'équation d'état en introduisant la densité d'énergie $\epsilon = E/V$.

Les équations fondamentales de la cosmologie sont donc les deux équations de Friedmann

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{R^2} \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\epsilon + 3P) \end{cases}$$

En considérant une constante cosmologique Λ (pour diverses raisons non abordées ici ...) les équations d'Einstein sont modifiées en

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$$

et les équations de Friedmann qui en découlent s'écrivent

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G\epsilon}{3} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} & (F1) \\ \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\epsilon + 3P) + \frac{\Lambda}{3} & (F2) \end{cases}$$

On écrit généralement une équation complémentaire à partir des deux ci-dessus, en multipliant (F1) par R^2 et en dérivant le tout par rapport au temps on obtient

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3}(\dot{\epsilon}R^2 + 2\epsilon R\dot{R}) + \frac{2\Lambda}{3}R\dot{R}$$

on injecte alors (F2) pour obtenir

$$\dot{\epsilon} = -3\frac{\dot{R}}{R}(P + \epsilon) \quad (F3) \quad (2.4)$$

qui est l'équation de conservation de l'énergie impulsion (que l'on aurait pu obtenir en écrivant $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$, mais c'est un peu plus long ...).

Chapitre 3

Système dynamique de l'univers homogène et isotrope

3.1 Les équations du système dynamique

Pour cette étude on récrit les équations de Friedmann sous forme adimensionnée, en introduisant les paramètres

$$H(t) = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{d(\ln R)}{dt} \quad (3.1)$$

$$q(t) = -\frac{\ddot{R}}{R} \frac{1}{H^2} = -\frac{\ddot{R}}{\dot{R}^2} R \quad (3.2)$$

$$\Omega_m(t) = \frac{8\pi G \epsilon}{3H^2} \quad (3.3)$$

$$\Omega_k(t) = -\frac{k}{R^2 H^2} \quad (3.4)$$

$$\Omega_\Lambda(t) = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad (3.5)$$

qui sont tous fondamentaux : $H(t)$ est la constante de Hubble qui comme chacun peut le constater, n'est constante que pour chaque temps t considéré ..., $q(t)$ est le taux de décélération de l'univers et $\Omega_m(t)$, $\Omega_k(t)$ et $\Omega_\Lambda(t)$ représentent respectivement les densités adimensionnées de matière, de courbure et de constante cosmologique. Avec ces nouvelles variables on obtient

$$\begin{cases} \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1 & (F1.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4\pi G}{3H^2} (\epsilon + 3P) = q + \Omega_\Lambda & (F2.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = -3H(P + \epsilon) & (F3.1) \end{cases}$$

On considère une équation d'état barotropique, c'est-à-dire de la forme $P = \omega\epsilon$ avec pour des raisons physiques $\omega \in [-1, 1]^1$, les cas remarquables pour les valeurs de ω sont rassemblés dans le tableau² ci dessous

ω	-1	0	1/3	2/3	1
Etat	Vide quantique	gaz de poussières incohérentes	gaz parfait de photons	gaz parfait monoatomique	matière raide

(3.6)

il vient alors

$$\begin{cases} \Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda & (F1.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} q = \frac{\Omega_m(1 + 3\omega)}{2} - \Omega_\Lambda & (F2.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\ln \epsilon)' = -3(1 + \omega) & (F3.2) \end{cases}$$

¹La valeur $\omega = -1$ correspond au vide quantique et la valeur $\omega = 1$ correspond quant à elle à la matière la plus dense possible, dite raide, pour laquelle la vitesse du son est égale à celle de la lumière.

²On pourra consulter le site web de l'auteur pour trouver de nombreux détails à ce sujet ... <http://www.ensta.fr/~perez>

Dans la dernière relation nous avons utilisé une dernière variable $\lambda = \ln R$, la dérivée associée étant notée $'$, ainsi

$$(\ln \epsilon)' = \frac{d \ln \epsilon}{d \ln R} = -3(1 + \omega) \quad (3.7)$$

Par définition nous avons

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \Rightarrow (\ln H)' = (\ln \dot{R} - \ln R)' = \frac{d \ln \dot{R}}{d \ln R} - 1$$

par un jeu d'écriture il vient alors

$$\frac{d \ln \dot{R}}{d \ln R} = \frac{\frac{d \ln \dot{R}}{dt}}{\frac{d \ln R}{dt}} = \frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = -q$$

et finalement

$$(\ln H)' = -q - 1 \quad (3.8)$$

Ces calculs intermédiaires terminés, nous pouvons obtenir le système différentiel associé aux univers de Friedmann. On procède en deux étapes :

– Première équation. Il suffit d'écrire la définition de $\Omega_m(t)$ pour avoir

$$[\ln \Omega_m]' = \frac{\Omega_m'}{\Omega_m} = \left[\ln \left(\frac{8\pi G}{3H^2} \right) + \ln(\epsilon) - 2 \ln(H) \right]'$$

ainsi en utilisant successivement (3.8), (3.7) et (F2.2) on trouve alors

$$\frac{\Omega_m'}{\Omega_m} = (1 + 3\omega)(\Omega_m - 1) - 2\Omega_\Lambda \quad (3.9)$$

– Deuxième équation. Il suffit d'écrire la définition de $\Omega_\Lambda(t)$ pour avoir

$$[\ln \Omega_\Lambda]' = \frac{\Omega_\Lambda'}{\Omega_\Lambda} = \left[\ln \left(\frac{\Lambda}{3} \right) - 2 \ln H \right]'$$

toujours en utilisant (3.7) et (F2.2) on trouve maintenant

$$\frac{\Omega_\Lambda'}{\Omega_\Lambda} = 2q + 2 = \Omega_m(1 + 3\omega) - 2\Omega_\Lambda + 2 \quad (3.10)$$

En rassemblant tous nos petits, les équations de la dynamique des univers de Friedmann s'écrivent comme un système différentiel

$$\begin{cases} \Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda \\ \Omega_m' = \Omega_m [(1 + 3\omega)(\Omega_m - 1) - 2\Omega_\Lambda] \\ \Omega_\Lambda' = \Omega_\Lambda [\Omega_m(1 + 3\omega) + 2(1 - \Omega_\Lambda)] \end{cases}$$

La première de ces équations permet d'obtenir Ω_k connaissant les expressions de Ω_m et Ω_Λ , les deux dernières constituent un système différentiel non linéaire dans \mathbb{R}^2 que nous allons étudier. Il s'écrit, en posant $w = 1 + 3\omega$ variant dans l'intervalle $[-2, 4]$

$$X' = F_w(X) \quad \text{avec } X = [\Omega_m, \Omega_\Lambda]^\top \quad \text{et } F_w : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{array}$$

où l'on a posé pour plus de concision dans l'écriture

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x[w(x - 1) - 2y] \\ f_2(x, y) = y[w x + 2(1 - y)] \end{cases} \quad (3.11)$$

3.2 Les états d'équilibre de l'univers homogène et isotrope

Les équilibres sont les points X^* tels que $F_w(X^*) = 0$, comme tout le monde peut le vérifier, cette équation admet 3 solutions.

3.2.1 L'univers de de Sitter : $X_1^* = [0, 1]^\top$

Il s'agit de la solution pour laquelle $\Omega_m = 0$, $\Omega_\Lambda = 1$ et donc $\Omega_k = 0$. C'est un univers vide de matière ($\epsilon = P = 0$), plat ($k = 0$) et avec une constante cosmologique $\Lambda = 3H^2$. Dans ce cas très simple, les équations de Friedmann se réduisent à

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \Rightarrow \frac{\ddot{R}}{\dot{R}} = \frac{\dot{R}}{R} \Rightarrow \frac{d \ln \dot{R}}{dt} = \frac{d \ln R}{dt}$$

qui s'intègre en

$$\ln \dot{R} = \ln(\alpha R) \quad \text{avec } \alpha = \frac{\dot{R}(0)}{R(0)} \in \mathbb{R}_+$$

en utilisant la bijectivité du logarithme on a donc $\dot{R} = \alpha R$ qui s'intègre encore en

$$R(t) = R(0) e^{\alpha t}$$

l'univers de de Sitter possède un Big-Bang en $t = -\infty$, il n'a donc pas de "début", il est de plus en perpétuelle inflation exponentielle : un bel équilibre!

3.2.2 L'univers d'Einstein-de Sitter : $X_2^* = [1, 0]^\top$

Il s'agit de la solution pour laquelle $\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_m = 1$ et donc $\Omega_k = 0$. Il est toujours plat ($k = 0$), ne contient pas de constante cosmologique ($\Lambda = 0$), la densité d'énergie qu'il contient est constamment critique, c'est-à-dire quelle vérifie la relation

$$\epsilon(t) = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2$$

les équations de Friedmann, dans l'hypothèse barotropique, se réduisent dans ce cas à

$$\frac{\ddot{R}}{\dot{R}} = -\frac{w}{2} \frac{\dot{R}}{R} \Rightarrow \frac{d \ln \dot{R}}{dt} = \frac{d \ln R^{-\frac{w}{2}}}{dt}$$

soit $\dot{R} = \alpha R^{-\frac{w}{2}}$ avec toujours $\alpha > 0$, l'intégration de cette dernière équation est toujours aussi directe, on a

$$R^{\frac{w}{2}} dR = \alpha dt \Rightarrow \begin{cases} R(t) = R(0) e^{\alpha t} & \text{si } w = -2, \text{ c'est à dire } \omega = -1 \\ R(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega)}} & \text{si } w > -2, \text{ c'est à dire } \omega > -1 \end{cases}$$

S'il n'est pas rempli de vide quantique ($\omega > -1$), l'univers d'Einstein-de Sitter est donc d'âge fini et se trouve en expansion perpétuellement décélérée.

3.2.3 L'univers de Milne : $X_3^* = [0, 0]^\top$

Il s'agit de la solution pour laquelle $\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_m = 0$ et donc $\Omega_k = 1$. C'est un univers vide de matière ($\epsilon = P = 0$), sans constante cosmologique et de courbure négative $k = -R^2 H^2$: ses sections spatiales possèdent une géométrie hyperbolique (selle de cheval). Pour cet univers les équations de Friedmann s'écrivent

$$\frac{\ddot{R}}{R} = 0 \quad \text{soit } R(t) = \dot{R}(0)t + R(0)$$

Le facteur d'échelle étant positif, il existe donc un temps t_0 pour lequel $R(t_0) = 0$, c'est le big-bang! Depuis cet instant l'univers de Milne est en expansion linéaire, sa densité d'énergie reste nulle. Bien que cela semble irréaliste, cette densité pourrait être nulle en moyenne s'il existait de la matière antigravitante symétriquement répartie autour de la matière ordinaire ... Les problèmes actuels de matière et d'énergie noire seraient alors réglés ... De telles éventualités sont en cours d'étude!

3.3 Stabilité de l'univers homogène et isotrope

Le système dynamique décrivant les univers de Friedmann s'écrit comme nous l'avons vu plus haut $X' = F_\omega(X)$, en effectuant un développement de Taylor au voisinage d'un des points d'équilibre nous avons

$$F(X) = F(X^*) + DF(X)(X^*)(X - X^*) + o(\|X - X^*\|)$$

attendu que $F(X^*) = 0$ et que $(X^*)' = 0$, en posant $Y = X - X^*$ on peut donc écrire

$$Y' = DF(X)(X^*) Y + o(\|X - X^*\|)$$

dans un voisinage de X^* et avec les notation (3.11), la dynamique du système est linéaire et régie par la matrice

$$DF(X)(X^*) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{array} \right]_{X=X^*} = \left[\begin{array}{cc} -w - 2y + 2wx & -2x \\ wy & wx + 2 - 4y \end{array} \right]_{X=X^*}$$

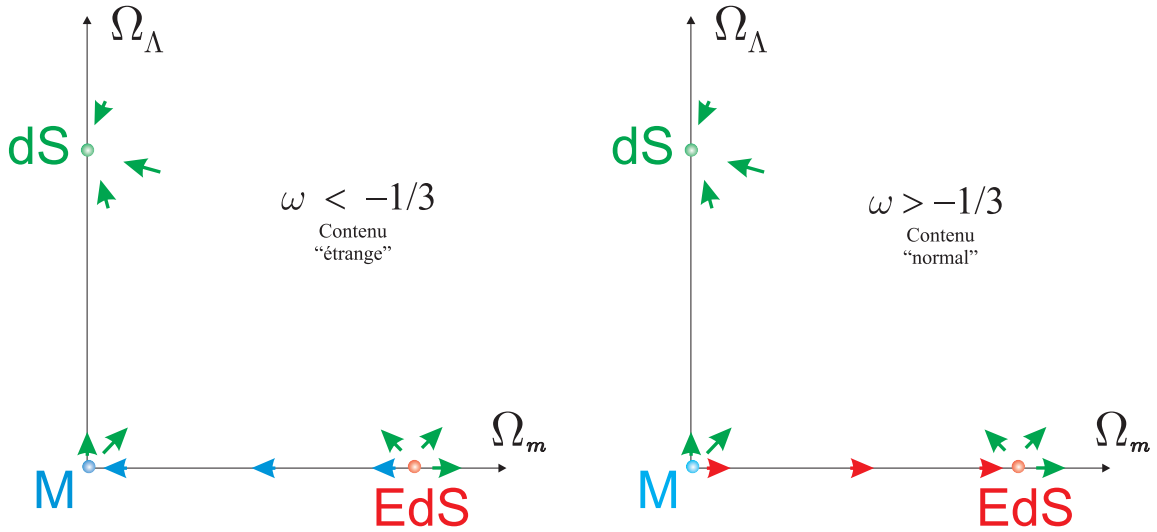
les valeurs propres de $DF(X)(X^*)$ pour chacun des états d'équilibre se calculent sans peine, on trouve

$$\begin{array}{ll} -3(1+\omega) \text{ et } -2 & \text{pour } X_1^* : (\text{dS}) \\ 3(1+\omega) \text{ et } -(1+3\omega) & \text{pour } X_2^* : (\text{EdS}) \\ (1+3\omega) \text{ et } 2 & \text{pour } X_3^* : (\text{M}) \end{array}$$

On se souvient que $\omega \in [-1, 1]$, le cas $\omega = -1$ correspondant au vide quantique est laissé de coté pour le moment supposons donc $1+\omega > 0$. Sous cette hypothèse $DF(X)(X_1^*)$ admet 2 valeurs propres négatives, l'univers de de Sitter est donc localement stable alors que ses deux collègues ont des comportements symétriques :

- Si $\omega \in]-1, -1/3[$, l'univers de Milne possède localement une seule valeur propre négative et l'univers d'Einstein-de Sitter est complètement instable avec ses deux valeurs propres positives.
- Si $\omega \in]-1/3, 1[$, c'est exactement l'inverse Einstein-de Sitter possède une orbite stable et Milne est un noeud répulsif dans le langage des systèmes dynamiques.
- Le cas $\omega = -1/3$ n'est pas accessible par la linéarisation car le système n'est pas hyperbolique : 0 est valeur propre de la matrice $DF(X)(X^*)$.

Dans le plan $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ l'orbite stable associée aux univers de Milne et Einstein-de Sitter est forcément le segment $[0, 1]$ sur l'axe $\Omega_\Lambda = 0$, on peut donc résumer la situation sur un schéma.



Dès qu'une constante cosmologique est présente l'univers de de Sitter devient l'équilibre attracteur pour les univers de Friedmann. Le caractère exponentiel de son facteur d'échelle produit alors un phénomène effrayant dans lequel l'univers et tous ses constituants se déchirent inexorablement, c'est le terrible Big-Ripp! Quel destin funeste.

Deuxième partie

L'univers homogène et anisotrope : Bianchi

Chapitre 4

Sections spatiales homogènes

4.1 Univers de Bianchi

Soit l'espace métrique de la relativité générale (espace-temps), si nous supposons qu'il existe un référentiel synchrone, à un instant donné t , dans ce référentiel synchrone la métrique se décomposera de la façon suivante

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dl^2 - dt^2 := \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j - dt^2 \quad (4.1)$$

L'homogénéité d'un espace métrique tient à l'identité de ses propriétés métriques en tous ses points. L'espace-temps est dit homogène si, à chaque instant, sa section spatiale (l'espace, d'élément de longueur dl^2) admet un ensemble de transformations conservant l'élément de longueur dl^2 et permettant de mettre en relation tout point de l'espace avec tout autre : un ensemble d'isométrie. Cet ensemble est appelé groupe des déplacements.

Par transformation par un élément du groupe des déplacements nous devons donc avoir

$$dl^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j = \tilde{g}_{ij}(x^\mu) dx^i dx^j = \tilde{g}_{ij}(x'^\mu) dx'^i dx'^j$$

Dans le cas de l'espace euclidien, le groupe des déplacements est celui qui conserve les trois différentielles indépendantes (dx^1, dx^2, dx^3) , la seule liberté d'invariance pour un vecteur est son transport parallèle, nous devons donc avoir

$$dx'^1 = dx^1 + a, \quad dx'^2 = dx^2 + b, \quad dx'^3 = dx^3 + c$$

ou (a, b, c) est un vecteur constant de \mathbb{R}^3 , le groupe des déplacements est donc l'ensemble des translations.

Dans le cas non euclidien, l'affaire est bien plus complexe : le groupe des déplacements laisse invariant trois formes différentielles linéaires indépendantes, mais celles-ci ne se réduisent plus à des différentielles totales, nous aurons donc

$$\text{pour chaque } i = 1, 2, 3 \quad dx^i = e_j^i dy^j \quad (4.2)$$

les vecteurs indépendants $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$ fonctions des coordonnées s'appelant les vecteurs repères¹. L'élément de longueur invariant par le groupe des déplacements s'écrit donc

$$dl^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j = dl^2 = \tilde{g}_{ij} e_k^i dy^k e_l^j dy^l$$

les composantes spatiales de la métrique vérifient donc

$$\tilde{g}_{kl} = \tilde{g}_{ij} e_k^i e_l^j$$

Du fait de la symétrie des \tilde{g}_{ij} nous déduisons de cette relation

$$e_j^i e_k^j = \delta_k^i \quad \text{et} \quad e_j^i e_i^k = \delta_j^k$$

La conservation de l'élément de longueur dl^2 est donc équivalente à

$$\text{pour chaque } i = 1, 2, 3 \quad e_j^i(y^\mu) dy^j = e_j^i(y'^\mu) dy'^j$$

en multipliant cette condition par $e_i^k(y'^\mu)$, il vient

$$\begin{aligned} e_i^k(y'^\mu) e_j^i(y^\mu) dy^j &= e_i^k(y'^\mu) e_j^i(y'^\mu) dy'^j \\ &= \delta_j^k dy'^j \\ &= \frac{\partial y'^k}{\partial y^j} dy^j \end{aligned}$$

¹Dans cette notation e^i n'est pas la composante contravariante de e , mais bel et bien un vecteur de \mathbb{R}^3 dont les composantes dans la base canonique sont (e_1^i, e_2^i, e_3^i) .

qui signifie donc que

$$\frac{\partial y'^k}{\partial y^j} = e_i^k (y'^\mu) e_j^i (y^\mu) \quad (4.3)$$

En se donnant les vecteurs repères les plus généraux, cette relation devient une équation différentielle dont la solution nous donne l'ensemble des transformations possibles : Le groupe des déplacements.

En notation relativiste, l'équation (4.3) s'écrit

$$\partial_j y'^k = e_i'^k e_j^i$$

ou nous avons écrit, par abus de notation,

$$e_j^i (y^\mu) = e_j^i \quad \text{et} \quad e_i^k (y'^\mu) = e_i'^k$$

comme $\partial_l (\partial_j y'^k) = \partial_j (\partial_l y'^k)$, il vient après quelques lignes de calcul

$$(\partial_i e_j^c - \partial_j e_i^c) e_a^j e_b^i = (\partial_i' e_j'^c - \partial_j' e_i'^c) e_a'^j e_b'^i \quad (4.4)$$

soit deux relations identiques, l'une en variable y^μ l'autre en variable y'^μ , l'expression de l'équation (4.4) est donc constante

$$(\partial_i e_j^c - \partial_j e_i^c) e_a^j e_b^i = C_{ab}^c \quad (4.5)$$

ces constantes² sont appelées constantes de structure du groupe des déplacements. La définition de ces constantes permet de vérifier qu'elles possèdent trois propriétés fondamentales :

1. Les C_{ab}^c sont les composantes d'un tenseur d'ordre 3 de $(\mathbb{R}^{3*})^{\otimes 2} \otimes \mathbb{R}^3$;
2. Les C_{ab}^c sont antisymétriques pour leurs composantes covariantes $C_{ab}^c = -C_{ba}^c$;
3. Les C_{ab}^c vérifient une identité de Jacobi

$$C_{ab}^e C_{ec}^d + C_{bc}^e C_{ea}^d + C_{ca}^e C_{eb}^d = 0 \quad (4.6)$$

Il est commode de décomposer ces constantes de structure en une partie symétrique et une partie antisymétrique. Ceci est toujours possible en écrivant

$$C_{ab}^c = \varepsilon_{abd} N^{dc} + \delta_b^c A_a - \delta_a^c B_b \quad (4.7)$$

où ε_{abd} est le tenseur unité complètement antisymétrique et δ_b^c le symbole de Kronecker, N^{ab} est la composante complètement contravariante d'un tenseur symétrique d'ordre 2, et (pour respecter l'identité de Jacobi) le vecteur A doit vérifier

$$N^{ab} A_b = N_{ab} A^b = 0 \quad (4.8)$$

La décomposition (4.7) permet de voir clairement qu'il existe neuf types distincts d'espaces homogènes en dimension 3. Six proviennent des 6 degrés de libertés introduits par les six composantes indépendantes du tenseur symétrique N , et trois des composantes du vecteur A .

Une spécification plus précise est toujours possible : Le tenseur N étant symétrique il existe toujours une base dans laquelle il est diagonal. Dans cette base, nous aurons

$$N^{ab} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Toujours dans cette base, et sans restreindre la généralité de notre propos, la relation (4.8) permet de poser $A_b = [a, 0, 0]$ pourvu que

$$an_1 = 0 \quad (4.10)$$

L'énumération des cas distincts peut alors se faire en considérant toutes les possibilités de multiplicité algébrique pour une valeur propre nulle de N , les différentes signatures de cette matrice et la condition (4.10)

Il vient

²les indices prennent les valeurs 1,2 et 3

	n_1	n_2	n_3	a	Nom
0 est valeur propre triple de N	0	0	0	0	B_I
	0	0	0	\forall	B_V
0 est valeur propre double de N	1	0	0	0	B_{II}
	0	1	0	\forall	B_{IV}
0 est valeur propre simple de N	1	1	0	0	B_{VII_o}
	0	1	1	\forall	B_{VII_a}
	1	-1	0	0	B_{VI_o}
	0	1	-1	$\neq 1$	B_{VI_a}
	0	1	-1	1	B_{III}
0 n'est pas valeur propre de N	1	1	1	0	B_{IX}
	1	1	-1	0	B_{VIII}

Les cas dégénérés équivalents n'ont pas été indiqués pour des raisons de concision. Par exemple, le cas $n_1 = -1, n_2 = 1, n_3 = -1$ et donc forcément $a = 0$ est dans la classe d'équivalence B_{IX} avec une signature $+$ et 0 hors du spectre. Nous retrouvons bien les neuf cas distincts d'espaces riemanniens homogènes de dimension 3. Les chiffres romains associés aux types indiqués correspondent à la classification faite par L. Bianchi en 1898 (voir [B1],[B2]).

Une fois les espaces homogènes classifiés, il est possible dans chaque cas d'écrire le tenseur métrique associé et d'en déduire les composantes du tenseur de Ricci.

4.2 Formulation BKL

Le tenseur métrique est toujours diagonalisable. La recherche des formes différentielles invariantes de base (voir (4.2))a été réalisée dans le cas général par Mac Callum en 1979 (voir [3]), il obtient

Type	ω^1	ω^2	ω^3
B_I	dx_1	dx_2	dx_3
B_{II}	$dx_1 - x_3 dx_2$	dx_2	dx_3
B_{III}, B_{IV}	dx_1	$e^{x_1} dx_2$	$e^{x_1} (dx_3 + x_1 dx_2)$
B_V	dx_1	$e^{x_1} dx_2$	$e^{x_1} dx_3$
B_{VI}	dx_1	$e^{ax_1} (\text{ch}(x_1) dx_2 - \text{sh}(x_1) dx_3)$	$e^{ax_1} (-\text{sh}(x_1) dx_2 + \text{ch}(x_1) dx_3)$
B_{VII}	dx_1	$e^{ax_1} (\cos(x_1) dx_2 - \sin(x_1) dx_3)$	$e^{ax_1} (\sin(x_1) dx_2 - \cos(x_1) dx_3)$
B_{VIII}	$ch(x_2) \cos(x_3) dx_1 - \sin(x_3) dx_2$	$ch(x_2) \sin(x_3) dx_1 + \cos(x_3) dx_2$	$sh(x_2) dx_1 + dx_3$
B_{IX}	$\cos(x_2) \cos(x_3) dx_1 - \sin(x_3) dx_2$	$\cos(x_2) \sin(x_3) dx_1 + \cos(x_3) dx_2$	$\sin(x_2) dx_1 + dx_3$

Dans la définition générale (4.1) en posant $\tilde{g}_{ij} dx^i dx^j = \gamma(\tau) \omega^i \omega^j$ et en introduisant un temps conforme tel que $dt = N(\tau) d\tau$ où $N(\tau)$ est appelée fonction "lapse", on obtient

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j - dt^2 = \gamma(\tau) \omega^i \omega^j - N^2(\tau) d\tau^2 \quad (4.11)$$

la dépendance temporelle de la composante spatiale de la métrique se diagonalise $\gamma(\tau) = \text{diag}(\alpha_i(t))$. Dans cette représentation les composantes non nulles du tenseur de Ricci s'obtiennent après quelques calculs

$$\left\{ \begin{array}{l} 2N^2 \frac{R_{00}}{g_{00}} = (\ln(V^2))'' - \frac{1}{2} (\ln(N^2))' (\ln(V^2))' + \frac{1}{2} (A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2) \\ 2N^2 \frac{R_{11}}{\tilde{g}_{11}} = A_1'' + \frac{1}{2} A_1' (\ln V^2 - \ln N^2)' + K^2 (n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2) \\ 2N^2 \frac{R_{22}}{\tilde{g}_{22}} = A_2'' + \frac{1}{2} A_2' (\ln V^2 - \ln N^2)' + K^2 (n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2) \\ 2N^2 \frac{R_{33}}{\tilde{g}_{33}} = A_3'' + \frac{1}{2} A_3' (\ln V^2 - \ln N^2)' + K^2 (n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2) \end{array} \right. \quad (4.12)$$

ou $V(\tau) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$ est proportionnel à chaque instant au volume de la section spatiale de l'Univers, $A_i = \ln(\alpha_i)$ est toujours défini car $\alpha_i > 0$, $K^2 = N^2/V^2$, et $' = d/d\tau$.

Il ne reste plus qu'à écrire les équations d'Einstein (1.8) pour obtenir la dynamique de l'Univers homogène anisotrope. Dans le cas d'un fluide parfait, de pression P de densité d'énergie ϵ et décrit par un champ de quadrivitesse de composante covariante u_μ au repos dans le référentiel synchrone ($u_0 = c = 1$, $u_i = 0$)

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + (P + \epsilon) u_\mu u_\nu \quad (4.13)$$

Ainsi $T = T_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 3P - \epsilon$ et

$$R_{\mu\nu} = \chi \left((P + \epsilon) u_\mu u_\nu - \frac{1}{2} (P - \epsilon) g_{\mu\nu} \right) \quad (4.14)$$

Les équations d'Einstein s'écrivent

$$R_{00} = -\frac{\chi}{2} (3P + \epsilon) g_{00} \quad \text{et} \quad R_{ii} = -\frac{\chi}{2} (P - \epsilon) \tilde{g}_{ii} \quad (4.15)$$

Ainsi en injectant les résultats (4.12) dans ces équations et en choisissant une fonction lapse $N^2 = V^2 = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$, les équations de la dynamique deviennent

$$\begin{cases} \chi V^2 (3P + \epsilon) &= -(\ln(V^2))'' + \frac{1}{2} \left((\ln(V^2))' \right)^2 - \frac{1}{2} (A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2) \\ \chi V^2 (\epsilon - P) &= A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ \chi V^2 (\epsilon - P) &= A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ \chi V^2 (\epsilon - P) &= A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{cases} \quad (4.16)$$

On peut alors remplacer la première de ces équations par la somme de toutes ces équations, il reste

$$\begin{cases} 0 &= E_c + E_p + E_m \\ \chi V^2 (\epsilon - P) &= A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ \chi V^2 (\epsilon - P) &= A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ \chi V^2 (\epsilon - P) &= A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{cases} \quad (4.17)$$

avec

$$\begin{aligned} E_c &= A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_2' A_3' \\ E_p &= 2(n_1 n_2 \alpha_1 \alpha_2 + n_1 n_3 \alpha_1 \alpha_3 + n_2 n_3 \alpha_2 \alpha_3) - n_1^2 \alpha_1^2 - n_2^2 \alpha_2^2 - n_3^2 \alpha_3^2 \\ &= \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i} \\ E_m &= -4\chi \epsilon V^2 = -32\pi G \epsilon e^{(A_1 + A_2 + A_3)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Les équations (4.17) sont les équations les plus générales décrivant la dynamique de l'Univers homogène et anisotrope contenant un gaz parfait dans le cadre de la relativité générale d'Einstein.

Elles contiennent bien évidemment la conservation de l'énergie-impulsion $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Nous pouvons toutefois écrire cette dernière équation de façon plus explicite.

Un simple calcul montre que

$$D^\mu T_{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow g_{\mu\nu} \partial^\mu P + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial^\mu ([P + \epsilon] \sqrt{-g} u_\mu u_\nu) = 0$$

la composante temporelle de cette équation dans notre référentiel synchrone nous indique donc que

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial t} ([P + \epsilon] \sqrt{-g}) \quad (4.19)$$

souvenons-nous à présent que $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \gamma(t) \omega^i \omega^j - dt^2$ ou $\gamma(t)$ est une matrice 3×3 diagonale $\gamma(t) = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et les fonctions de base ω^i dépendent du type d'anisotropie considérée, généralement de (x_1, x_2, x_3) mais pas de t (voir tableau (4.2)). Il est simple de se convaincre que la racine du déterminant de la métrique s'écrit

$$\sqrt{-g} = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \phi(x_1, x_2, x_3) = V(t) \phi(x_1, x_2, x_3)$$

ou la fonction ϕ dépend du type d'anisotropie. Ainsi l'équation (4.19) devient

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial t} ([P + \epsilon] V)$$

V , P et ϵ étant des fonctions du temps seul, quelques manipulations fournissent finalement

$$P = -\frac{d(\epsilon V)}{dV} \quad (4.20)$$

C'est l'équation de conservation de l'énergie-impulsion que nous utiliserons.

Une petite remarque : En considérant le volume de la section spatiale de l'univers à l'instant t , c'est-à-dire

$$\mathcal{V}(t) = \int \sqrt{-g} \prod_{i=1}^3 dx_i = V(t) \int \phi(x_1, x_2, x_3) \prod_{i=1}^3 dx_i = kV(t) \quad (4.21)$$

où la constante k dépend du type d'anisotropie. Ce volume contient une énergie totale

$$E = \epsilon \mathcal{V} = k\epsilon V$$

La conservation de l'énergie impulsion (4.20) s'écrit donc

$$P = -\frac{dE}{k dV} = -\frac{dE}{d\mathcal{V}} \Leftrightarrow P d\mathcal{V} + dE = 0$$

en application du premier principe de la thermodynamique, cette relation témoigne donc d'une évolution adiabatique de l'Univers : $dS = 0$.

Il est alors courant de faire une dernière hypothèse ...

Nous considérerons que le fluide parfait contenu dans l'Univers est barotropique. C'est-à-dire qu'il suit une équation d'état de la forme

$$P = (\Gamma - 1) \epsilon \quad (4.22)$$

où $\Gamma \in [0, 2]$ est la constante barotropique. Une telle relation est très générale et s'applique à de nombreux fluides pour peu qu'ils contiennent une phase dominante.

En couplant les équations (4.20) et (4.22) il vient immédiatement

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon} = -\Gamma \frac{dV}{V} \quad (4.23)$$

soit

$$\epsilon = \epsilon_o V^{-\Gamma} = \epsilon_o (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{-\Gamma/2} \quad (4.24)$$

Où ϵ_o est une constante d'intégration, positive pour de la matière ordinaire.

Sous l'hypothèse barotropique les équations de la dynamique de l'Univers homogène et anisotrope deviennent

$$\begin{cases} 0 & = E_c + E_p + E_{mb} \\ \chi \epsilon_o V^{2-\Gamma} (2-\Gamma) & = A_1'' + n_1^2 \alpha_1^2 - (n_2 \alpha_2 - n_3 \alpha_3)^2 \\ \chi \epsilon_o V^{2-\Gamma} (2-\Gamma) & = A_2'' + n_2^2 \alpha_2^2 - (n_3 \alpha_3 - n_1 \alpha_1)^2 \\ \chi \epsilon_o V^{2-\Gamma} (2-\Gamma) & = A_3'' + n_3^2 \alpha_3^2 - (n_1 \alpha_1 - n_2 \alpha_2)^2 \end{cases} \quad (4.25)$$

avec $E_{mb} = -4\chi \epsilon_o V^{2-\Gamma}$, $\chi = 8\pi G$ et $\epsilon_o > 0$ si $0 \leq \Gamma \leq 2$

4.3 Formulation Hamiltonienne

La composante temporelle des équations de la dynamique peut s'interpréter comme la conservation d'une énergie. Nous avons en effet

$$H := E_c + E_p - 4\chi \epsilon e^{(A_1 + A_2 + A_3)} = 0 \quad (4.26)$$

avec

$$E_c = A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2'$$

et
$$E_p = \sum_{i \neq j=1}^3 n_i n_j e^{A_i + A_j} - \sum_{i=1}^3 n_i^2 e^{2A_i}$$

l'idée sous-jacente au formalisme hamiltonien est la recherche d'un changement de variables pour lequel, l'intégrale première H , s'écrit comme un Hamiltonien en termes de grandeurs *canoniquement* conjuguées. Cela revient en fait à réduire la forme quadratique associée à l'énergie cinétique.

4.3.1 Réduction du terme "cinétique"

Le terme cinétique E_c dépend des dérivées premières par rapport à τ , il s'agit d'une forme quadratique qui s'écrit sous forme matricielle

$$E_c = \frac{1}{2} \mathbf{x} M \mathbf{x}^T$$

avec

$$\mathbf{x} := [A'_1, A'_2, A'_3] \text{ et } M := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

une première partie du travail consiste donc à chercher une matrice P telle que $M = P\Delta P^T$ où Δ est une matrice diagonale. Les valeurs propres de M sont $\lambda_1 = -1$ (double) et $\lambda_2 = 2$, les sous espaces propres associés sont

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 0\} \\ \mathcal{E}_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\} \end{aligned}$$

la base orthogonale la plus générale de \mathcal{E}_1 est donc $\{\mathbf{u}_{11} = [a, -a, 0]^T; \mathbf{u}_{12} = [b, b, -2b]^T\}$ la base de \mathcal{E}_2 est de la forme $\{\mathbf{u}_2 = [c, c, c]^T\}$, la matrice passage de la base canonique de \mathbb{R}^3 à une base orthogonale de $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ est donc

$$P := \begin{bmatrix} a & b & c \\ -a & b & c \\ 0 & -2b & c \end{bmatrix}$$

pour que P soit une matrice orthogonale, il faut orthogonaliser aussi les lignes, cela revient à imposer les conditions

$$\begin{cases} -a^2 + b^2 + c^2 = 0 \\ -2b^2 + c^2 = 0 \end{cases}$$

soit $a = \pm b\sqrt{3}$ et $c = \pm b\sqrt{2}$, enfin la condition de normalisation $P^T P = P P^T = I$, impose finalement la condition $6b^2 = 1$ d'où la matrice de passage

$$P := \begin{bmatrix} \frac{\pm 1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\mp 1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\pm 1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Dans ces conditions la matrice de la forme quadratique E_c s'écrit

$$M = P \cdot \text{diag}(-1, -1, 2) \cdot P^{-1} = P \cdot \text{diag}(-1, -1, 2) \cdot P^T := P\Delta P^T$$

et E_c elle même

$$E_c = \frac{1}{2} \mathbf{x} M \mathbf{x}^T = \frac{1}{2} \mathbf{x} P \Delta P^T \mathbf{x}^T = \frac{\mathbf{x} P}{\sqrt{2}} \cdot \Delta \cdot \left(\frac{\mathbf{x} P}{\sqrt{2}} \right)^T$$

en posant $\mathbf{x} = \sqrt{2} \mathbf{y} P^T$ et $\mathbf{y} = [x, y, z]$, il vient donc $E_c(x, y, z) = -x^2 - y^2 + 2z^2$. A ce stade, une petite remarque s'impose, par certaines homothéties agissant dans les sous espaces propres, il est possible d'affecter les coefficients numériques présents devant les carrés mais sans qu'il soit possible d'affecter leurs signes relatifs, la signature $(-, -, +)$ est en effet une propriété globale de la forme quadratique E_c et en ce sens non modifiable. Au lieu de choisir le changement de variable induit par la matrice $\sqrt{2} P^T$ comme le suggère la définition de \mathbf{y} , pour obtenir une forme se rapprochant le plus possible d'une énergie cinétique écrite en variables canoniques, nous prendrons (l'arbitraire \pm ne change rien au résultat sur E_c)

$$x = \sqrt{2} \mathbf{y}' P'^T \quad \text{avec} \quad P' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

le facteur $1/\sqrt{2}$ extérieur est destiné à faire apparaître le facteur $1/2$ de nos chères énergies cinétiques, et le facteur $1/\sqrt{2}$ intérieur agit sur le sous-espace propre \mathcal{E}_2 pour normaliser la contribution du troisième argument de E_c . En posant $\mathbf{y}' = [p_1, p_2, p_3]$, nous obtenons finalement

$$[A'_1, A'_2, A'_3] = [p_1, p_2, p_3] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

et

$$E_c(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{2} (p_3^2 - p_1^2 - p_2^2)$$

en introduisant les coordonnées généralisées $\mathbf{q} := [q_1, q_2, q_3]^T$ associées aux moments $\mathbf{p} := \mathbf{y}' = [p_1, p_2, p_3]^T$, c'est-à-dire

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad p_i = \frac{dq_i}{d\tau} = q'_i \quad (4.27)$$

nous avons immédiatement (à une constante près choisie nulle pour avoir $(q_i, p_i) \rightarrow (0, 0)$ quand $\tau \rightarrow \infty$)

$$\begin{cases} A'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}q'_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}q'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}q'_3 \\ A'_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}q'_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}q'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}q'_3 \\ A'_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}q'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}q'_3 \end{cases} \iff \begin{cases} q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 - A_2) \\ q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(A_1 + A_2 - 2A_3) \\ q_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}(A_1 + A_2 + A_3) \end{cases} \quad (4.28)$$

on constate donc que la variable q_3 est une fonction affine du logarithme du volume de l'Univers :

$$q_3 = \frac{2}{\sqrt{6}} \ln(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = \frac{4}{\sqrt{6}} \ln V = \frac{4}{\sqrt{6}} (\ln \mathcal{V} - \ln k) \quad (4.29)$$

où la constante k dépend du type d'anisotropie considérée (cf. relation (4.21)).

4.3.2 Terme potentiel

En effectuant le changement de variable (4.28) dans la partie "potentielle" de l'intégrale première H nous constatons que les variables (q_1, q_2) et q_3 se séparent en

$$E_p = \xi(q_1, q_2) e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_3}$$

avec

$$\begin{aligned} \xi(q_1, q_2) = & -n_1^2 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}q_2 + \sqrt{2}q_1\right)} - n_2^2 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}q_2 - \sqrt{2}q_1\right)} - n_3^2 e^{-\frac{2\sqrt{6}}{3}q_2} \\ & + 2n_1 n_2 e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_2} + 2n_1 n_3 e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}q_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}q_2\right)} + 2n_2 n_3 e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}q_1 + \frac{\sqrt{6}}{6}q_2\right)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

cette séparation des variables est reliée à la signature de la forme quadratique E_c et donc à des propriétés fondamentales des métriques de l'espace homogène.

Pour la forme un dernier petit changement de variables $q_+ = q_1/\sqrt{2}$ et $q_- = q_2/\sqrt{6}$ permet d'avoir une forme encore plus aboutie pour le potentiel

$$\begin{aligned} \xi(q_+, q_-) = & 2n_1 n_2 e^{2q_-} + 2n_1 n_3 e^{(q_+ - q_-)} + 2n_2 n_3 e^{-(q_+ + q_-)} \\ & - n_1^2 e^{2(q_+ + q_-)} - n_2^2 e^{2(-q_+ + q_-)} - n_3^2 e^{-4q_-} \end{aligned}$$

mais attention en variables (q_+, q_-, q_3) c'est la symétrie hamiltonienne qui est brisée ...

4.3.3 Dynamique Hamiltonienne

Les constructions précédentes nous permettent donc d'écrire l'intégrale première H de la dynamique des Univers homogènes sous la forme

$$H = \frac{1}{2} (p_3^2 - p_1^2 - p_2^2) + e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_3} \xi(q_1, q_2) - 4\chi \epsilon e^{\frac{\sqrt{6}}{2}q_3} = 0 \quad (4.31)$$

les équations de la dynamique prennent alors une forme tout à fait sympathique. Les définitions (4.27) et notre travail de diagonalisation montrent directement que

$$p_{1,2} := \frac{dq_{1,2}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial p_{1,2}} \quad \text{et} \quad p_3 := \frac{dq_3}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_3}$$

Les équations de la dynamique sont bien de type hamiltonien. on peut vérifier par le calcul que (en utilisant successivement (4.31), (4.30), (4.28) et (4.17))

$$\frac{dp_{1,2}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_{1,2}}$$

la dernière est plus instructive :

$$\frac{\partial H}{\partial q_3} = \frac{\sqrt{6}}{3} E_p + \frac{\sqrt{6}}{2} E_m - 4\chi \frac{\partial \epsilon}{\partial q_3} e^{\frac{\sqrt{6}}{2}q_3} \quad (4.32)$$

mais l'équation (4.29) fournit $V = e^{\frac{\sqrt{6}}{4}q_3}$ ainsi

$$\frac{\partial H}{\partial q_3} = \frac{\sqrt{6}}{3} E_p - 2\sqrt{6}\chi\epsilon V^2 - \chi\sqrt{6}V^3 \frac{\partial\epsilon}{\partial V}$$

Utilisant à présent la conservation de l'énergie impulsion (4.20) , il vient

$$V \frac{d\epsilon}{dV} = -(P + \epsilon)$$

et donc

$$\frac{\partial H}{\partial q_3} = \frac{\sqrt{6}}{3} [E_p + 3\chi V^2 (P - \epsilon)]$$

En ajoutant les trois composantes spatiales des équations de la dynamique on obtient par ailleurs

$$E_p + 3\chi V^2 (P - \epsilon) = -(A_1'' + A_2'' + A_3'')$$

$\sqrt{6}/3$ et $2/\sqrt{6}$ ne faisant qu'un, en se rappelant de la définition de q_3 dans (4.28) on trouve finalement

$$\frac{\partial H}{\partial q_3} = -\frac{2}{\sqrt{6}} (A_1 + A_2 + A_3)'' = -\frac{d^2 q_3}{d\tau^2} = -\frac{dp_3}{d\tau}$$

En variables (q_i, p_i) , la dynamique de l'Univers homogène est une dynamique quasi-hamiltonienne dont les équations sont

$$\begin{aligned} q'_{1,2} &= \frac{dq_{1,2}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial p_{1,2}} & p'_{1,2} &= \frac{dp_{1,2}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_{1,2}} \\ q'_3 &= \frac{dq_3}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_3} & p'_3 &= \frac{dp_3}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_3} \end{aligned} \tag{4.33}$$

La précaution "quasi-" vient informer le lecteur que ces variables ne sont pas complètement conjuguées à cause des signes moins qui ornent les 2 équations indicées 1 et 2. Pour les aficionados on remarquera que les crochets associés à une telle dynamique ne sont pas anticommutatifs et donc que la structure algébrique de ces équations n'est pas gouvernée par une algèbre de Lie. Néanmoins, beaucoup de techniques hamiltoniennes restent praticables dans ce contexte.

Chapitre 5

Résultats analytiques

5.1 Intégrabilité du système de l'Univers homogène

5.1.1 Systèmes différentiels autonomes et auto-similaires

Un système différentiel autonome est un ensemble d'équations différentielles dont les inconnues sont généralement des fonctions $x_{i=1,\dots,n}$ de la variable t que l'on regroupe en un vecteur $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$ vérifiant

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5.1)$$

La fonction \mathbf{f} de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n décrit la dynamique du système et associe à tout \mathbf{x} le vecteur $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})]^T$. Un tel système est réputé auto-similaire s'il jouit de la propriété d'invariance sous la double transformation

$$\begin{aligned} t &\mapsto t/\alpha \\ \forall i = 1, \dots, n \quad x_i &\mapsto \alpha^{g_i} x_i \end{aligned} \quad (5.2)$$

la constante réelle α caractérise l'auto similarité du système tout autant que les n poids g_i que l'on regroupe dans le vecteur $\mathbf{g} := [g_1, \dots, g_n]^T$. Si de plus la matrice

$$A(\mathbf{x}) \in M_n(\mathbb{R}) \text{ et } \forall i, j = 1, \dots, n \quad A_{ij} = x_j \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} - \delta_{ij} f_i(\mathbf{x}) \quad (5.3)$$

est inversible pour presque tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, alors le vecteur \mathbf{g} , dont les composantes sont des nombres rationnels, est unique.

L'intérêt de ces systèmes auto-similaires réside dans le fait qu'ils admettent toujours une solution particulière autosimilaire $\tilde{\mathbf{x}}_{as} = [c_1 (t - t_o)^{-g_1}, \dots, c_n (t - t_o)^{-g_n}]^T$. L'exploitation de la propriété d'auto-similarité montre en effet que les constantes c_i regroupées dans le vecteur $\mathbf{c} := [c_1, \dots, c_n]^T$ vérifient un système d'équations algébriques de la forme

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{c}) = -g_1 c_1 \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{c}) = -g_n c_n \end{cases} \quad (5.4)$$

Nous connaissons ainsi autant de solutions particulières non triviales qu'il y a de solutions au système (5.4).

La technique de Kovalewskaya s'applique alors : Cette méthode consiste à linéariser le système (5.1) au voisinage d'une solution particulière $\tilde{\mathbf{x}}_{as}$, le système linéaire obtenu s'écrit alors

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\tilde{\mathbf{x}}_{as}) \mathbf{z} \quad (5.5)$$

où $D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\tilde{\mathbf{x}}_{as})$ est la matrice jacobienne de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ calculée au point $\tilde{\mathbf{x}}_{as}$. Le théorème de Fuchs montre alors que la solution générale de (5.5) est autosimilaire et de la forme

$$\mathbf{z} = [k_1 (t - t_o)^{\rho_1 - g_1}, \dots, k_n (t - t_o)^{\rho_n - g_n}]^T \quad (5.6)$$

Les quantités $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ sont appelées exposants de Kovalewskaya, elles sont obtenues en calculant les valeurs propres de la matrice de Kovalewskaya ¹

$$K := D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{c}) + \text{diag}(\mathbf{g}). \quad (5.7)$$

¹En posant pour chaque $i = 1, \dots, n$: $x_i(t) = \tilde{x}_i + z_i t^{-g_i}$ et en linéarisant les équations pour \mathbf{z} on obtient

$$\begin{cases} t \frac{dz_i}{dt} = \sum_{j=1}^n K_{ij} z_j \end{cases}$$

Les exposants de Kovalewskaya peuvent être interprétés comme une généralisation des indices de Fuchs pour les systèmes non linéaires (voir [M4] paragraphes 5.6 et 5.7), ils peuvent donc être utilisés pour construire des séries solutions du système non linéaire. Au voisinage d'un point t_o (singularité), ces solutions sont de la forme

$$x_i(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k x_i^{(k)}(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x_i^{(0)} = c_i (t - t_o)^{g_i} \\ x_i^{(1)} = k_i (t - t_o)^{\rho_i - g_i} \\ \exists 1 \leq p, q \leq n, \quad x_i^{(2)} = c_p k_q (t - t_o)^{g_p + \rho_q - g_i} \\ \text{etc} \dots \end{cases}$$

plus succinctement on peut écrire

$$x_i(t) \propto (t - t_o)^{g_i} S[(t - t_o)^{\rho_1}, \dots, (t - t_o)^{\rho_n}] \quad (5.8)$$

ou $S[]$ est une série multiple. On constate donc avec une émotion non retenue, que si les exposants de Kovalewskaya sont des nombres entiers ou rationnels, le développement (5.8) permet formellement d'espérer obtenir la solution générale du système différentiel² et donc de qualifier le système d'intégrable. Si par contre il existe ne serait ce qu'un exposant réel, ou pire complexe, plus rien n'est à espérer de la barbare relation (5.8).

Ces considérations se trouvent concrétisées dans une série de théorèmes dont le plus important est du à Yoshida :

Théorème 1 *Une condition nécessaire pour qu'un système différentiel auto-similaire soit algébriquement intégrable est que tous ses exposants de Kovalewskaya soient des nombres rationnels . S'il existe au moins un exposant irrationnel, imaginaire ou complexe, le système n'admet pas un ensemble complet d'intégrales premières algébriques.*

Dans le cas d'exposants irrationnels, selon [M7], il reste la place pour des intégrales premières transcendentes, mais rien n'est garanti. Il semble toutefois que l'intégrabilité soit exclue dans le cas d'exposants complexes comme le montre la théorie de Ziglin [M8].

5.1.2 Exposants de Kovalewskaya et cosmologies anisotropes

Les travaux présentés ci-dessous ont été initiés par l'école russe dirigée par Melnikov dans les années 80-90 (voir [32]). Ils se sont concrétisés par un travail dans un cas particulier par [33] et une tentative de généralisation par [34]. Les résultats présentés par ces derniers auteurs étant soit faux soit imprécis, nous préférons reprendre cette étude dans sa totalité.

Mise en place

Le constat principal consiste à remarquer que le hamiltonien du système dynamique associé à l'Univers homogène est celui d'un réseau de Toda généralisé pour lequel de nombreux travaux théoriques ont été menés.

Ceci n'est pas très difficile : en introduisant les vecteurs

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &:= [0, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}] & \mathbf{a}_2 &:= [\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}] & \mathbf{a}_3 &:= [-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}] \\ \mathbf{a}_4 &:= [\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}] & \mathbf{a}_5 &:= [-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}] & \mathbf{a}_6 &:= [0, -\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}] \\ & & \mathbf{a}_7 &:= [0, 0, \frac{(2-\Gamma)\sqrt{6}}{4}] \end{aligned} \quad (5.9)$$

qu'il n'est pas anodin de représenter dans l'espace(voir figure 5.1).

Puis en définissant les formes

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^3 \quad \begin{aligned} \langle x, y \rangle &:= +x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\ \langle x, y \rangle &:= -x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{aligned}$$

et les constantes

$$\begin{aligned} k_1 &:= 2n_1 n_2 & k_2 &:= 2n_1 n_3 & k_3 &:= 2n_2 n_3 \\ k_4 &:= -n_1^2 & k_5 &:= -n_2^2 & k_6 &:= -n_3^2 \\ & & k_7 &:= -4\varepsilon_o \chi \end{aligned}$$

avec $K := Df(\mathbf{x})(\mathbf{c}) + \text{diag}(\mathbf{g})$. Dans la base qui diagonalise K avec les valeurs propres (ρ_1, \dots, ρ_n) en transformant $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y}$, on obtient le système

$$\left\{ t \frac{dy_i}{dt} = \rho_i y_i \right.$$

dont la solution est $y_i(t) = cste.t^{\rho_i}$. Chercher des solutions autosimilaires au voisinage d'une orbite autosimilaire revient donc à déterminer les valeurs propres de K .

²On obtient en fait une collection d'intégrales premières indépendantes ...

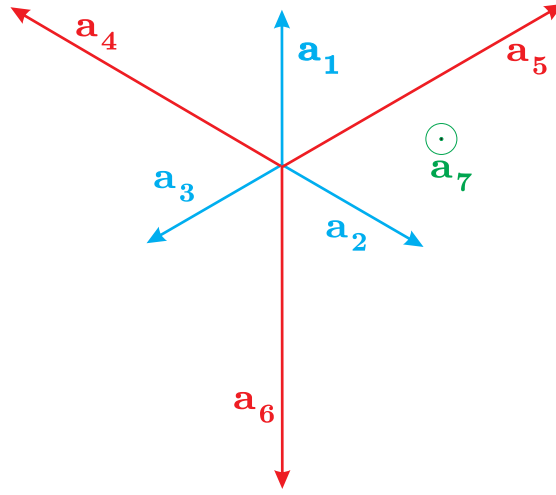


FIG. 5.1 – Représentation spatiale des vecteurs intervenant dans le Hamiltonien des Univers de Bianchi. Les vecteurs sont projetés sur le plan $\Pi = 0xy$. On constate que $a_7 \perp \Pi$, on vérifie que a_1, \dots, a_6 forment un angle de $\pi/4$ avec leur projection orthogonale sur Π .

il est clair qu'en présence d'un fluide barotropique de paramètre Γ conduisant à la relation (4.24), au vu de la relation (4.29), le Hamiltonien (4.31) s'écrit

$$H = \frac{1}{2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \sum_{i=1}^7 k_i e^{(\mathbf{a}_i, \mathbf{q})} \quad (5.10)$$

Après la formulation BKL puis hamiltonienne, les esprits chagrins pourraient penser que cette formulation à la Toda vient uniquement se rajouter à une liste (que l'on pourrait d'ailleurs compléter par celle de Wainwright cf.[36] chapitre 6 ou [37]), en fait chaque formulation possède son champ d'application, et celui du Toda est l'intégrabilité ...

Un petit changement de variables

Originellement introduit à six dimensions par l'école russe de Melnikov citée plus haut, effectuons le changement de variable

$$\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\} \mapsto \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{u} \in \mathbb{R}^7, u_{i=1, \dots, 7} := \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{p} \rangle \\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^7, v_{i=1, \dots, 7} := \exp(\mathbf{a}_i, \mathbf{q}) \end{cases}$$

Notons au passage que ce changement de variables fait passer le nombre de degrés de liberté du système de 6 en variables $\{\mathbf{q}, \mathbf{p}\}$ à 14 en variables $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Les équations de la dynamique (4.33) s'écrivent alors (le ' indique toujours une dérivation totale par rapport au temps conforme τ)

– Pour la variable \mathbf{v}

$$\begin{aligned} v'_i &= (\mathbf{a}_i, \mathbf{q}') e^{(\mathbf{a}_i, \mathbf{q})} = (\mathbf{a}_i, \mathbf{q}') v_i \\ &= \left(-\frac{\partial H}{\partial p_1} a_{i1} - \frac{\partial H}{\partial p_2} a_{i2} + \frac{\partial H}{\partial p_3} a_{i3} \right) v_i \\ &= (-p_1 a_{i1} - p_2 a_{i2} + p_3 a_{i3}) v_i \\ &= \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{p} \rangle v_i \\ &= u_i v_i \end{aligned}$$

– Pour la variable \mathbf{u}

$$\begin{aligned} u'_i &= \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{p}' \rangle = \frac{\partial H}{\partial q_1} a_{i1} + \frac{\partial H}{\partial q_2} a_{i2} - \frac{\partial H}{\partial p_3} a_{i3} \\ &= \sum_{j=1}^7 k_j v_j (a_{j1} a_{i1} + a_{j2} a_{i2} - a_{j3} a_{i3}) \\ &= - \sum_{j=1}^7 k_j v_j \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle \end{aligned}$$

en introduisant la matrice M carrée d'ordre 7 qui, dans la base canonique, a pour composantes les nombres m_{ij} tels que

$$m_{ij} := -k_j \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle$$

l'équation de la dynamique pour la variable \mathbf{u} devient

$$u'_i = \sum_{j=1}^7 m_{ij} v_j$$

Pour les nouvelles variables $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ la dynamique est polynomiale, elle s'écrit

$$\forall i = 1, \dots, 7 \quad \begin{cases} v'_i = u_i v_i \\ u'_i = \sum_{j=1}^7 m_{ij} v_j \end{cases}$$

En introduisant le vecteur $\mathbf{x} = [\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T]$, le système dynamique s'écrit sous la forme d'un système autonome du premier ordre évoqué lors du paragraphe précédent (cf. 5.1) :

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) := [f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{14}(\mathbf{x})]^T \quad (5.11)$$

avec

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^7 m_{ij} x_{j+7} \quad \text{si } i = 1, \dots, 7$$

$$f_i(\mathbf{x}) = x_i x_{i-7} \quad \text{si } i = 8, \dots, 14$$

Le système différentiel est polynomial donc autosimilaire : la condition d'invariance (5.2) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^7 m_{ij} x_{j+7} \Leftrightarrow \alpha^{g_i+1} \frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^7 m_{ij} x_{j+7} \alpha^{g_i+7} & \text{si } i = 1, \dots, 7 \\ \frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{j=1}^7 m_{ij} x_{j+7} \Leftrightarrow \alpha^{g_i+1} \frac{dx_i}{d\tau} = \alpha^{g_i+g_i-7} x_i x_{i-7} & \text{si } i = 8, \dots, 14 \end{cases}$$

Cette condition est vérifiée pour tout α non nul à condition d'avoir

$$g_1 = \dots = g_7 = 1 \quad \text{et} \quad g_8 = \dots = g_{14} = 2$$

Il n'est pas compliqué de vérifier que ce choix de \mathbf{g} est unique car la condition (5.3) est satisfaite. Le système (5.11) admet donc une solution particulière autosimilaire

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{c} t^{-\mathbf{g}} = [\lambda_1 t^{-1}, \dots, \lambda_7 t^{-1}, \mu_1 t^{-2}, \dots, \mu_7 t^{-2}]^T$$

conformément à (5.4), les constantes $\mathbf{c} = [\lambda, \mu] = [\lambda_1, \dots, \lambda_7, \mu_1, \dots, \mu_7]$ non toutes nulles, vérifient un système d'équations algébriques de la forme

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^7 m_{ij} \mu_j = -\lambda_i \\ \lambda_i \mu_i = -2\mu_i \end{cases} \quad (5.12)$$

à chaque solution de ce système d'équations correspond une solution particulière autosimilaire du système différentiel et donc un jeu de 14 exposants Kovalewskaya ...

Solutions du système d'équations algébriques

Compte-tenu de son importance nous détaillons la recherche de l'ensemble des solutions de l'équation algébrique associée à la mise en évidence des exposants de Kovalewskaya.

Commençons tout d'abord par une première remarque simplificatrice : La matrice M carrée d'ordre 7 associée à cette équation, dont les composantes dans la base canonique de \mathbb{R}^7 sont $m_{ij}/k_j = -\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j \rangle$ ou plus explicitement ($\gamma = 2 - \Gamma$)

$$M := \begin{bmatrix} 0 & -2n_1 n_3 & -2n_3 n_2 & 0 & 0 & 2n_3^2 & 2\varepsilon_o \chi \gamma \\ -2n_1 n_2 & 0 & -2n_3 n_2 & 0 & 2n_2^2 & 0 & 2\varepsilon_o \chi \gamma \\ -2n_1 n_2 & -2n_1 n_3 & 0 & 2n_1^2 & 0 & 0 & 2\varepsilon_o \chi \gamma \\ 0 & 0 & 4n_3 n_2 & -2n_1^2 & 2n_2^2 & 2n_3^2 & 2\varepsilon_o \chi \gamma \\ 0 & 4n_1 n_3 & 0 & 2n_1^2 & -2n_2^2 & 2n_3^2 & 2\varepsilon_o \chi \gamma \\ -4n_1 n_2 & 0 & 0 & 2n_1^2 & 2n_2^2 & -2n_3^2 & 2\varepsilon_o \chi \gamma \\ -\gamma n_1 n_2 & -\gamma n_1 n_3 & -\gamma n_2 n_3 & \frac{1}{2} \gamma n_1^2 & \frac{1}{2} \gamma n_2^2 & \frac{1}{2} \gamma n_3^2 & \frac{3\varepsilon_o \chi \gamma^2}{2} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

est de rang 3, ainsi tout déterminant d'ordre supérieur à 3 extrait de cette matrice est nul!

Le vecteur nul de \mathbb{R}^7 est toujours solution du système (5.12) celui-ci ne convient cependant pas à notre quête d'exposant qui requiert des solutions non triviales.

Quelques notations pour commencer : on notera $E_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, de plus, pour la résolution du système linéaire, nous manipulerons les mineurs de M jusqu'à l'ordre 3 :

$$\forall (i, j, k) \in E_7 \times E_7 \times E_7 \quad \Theta_i = m_{ii}, \Theta_{i,j} = \begin{vmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{vmatrix}$$

$$\Theta_{i,j,k} = \begin{vmatrix} m_{ii} & m_{ij} & m_{ik} \\ m_{ji} & m_{jj} & m_{jk} \\ m_{ki} & m_{kj} & m_{kk} \end{vmatrix}$$

ainsi que les déterminants

$$\Delta_{2i} = \begin{vmatrix} 2 & m_{ij} \\ 2 & m_{jj} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2j} = \begin{vmatrix} m_{ii} & 2 \\ m_{ji} & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{3i} = \begin{vmatrix} 2 & m_{ij} & m_{ik} \\ 2 & m_{jj} & m_{jk} \\ 2 & m_{kj} & m_{kk} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{3j} = \begin{vmatrix} m_{ii} & 2 & m_{ik} \\ m_{ji} & 2 & m_{jk} \\ m_{ki} & 2 & m_{kk} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{3k} = \begin{vmatrix} m_{ii} & m_{ij} & 2 \\ m_{ji} & m_{jj} & 2 \\ m_{ki} & m_{kj} & 2 \end{vmatrix}$$

il existe trois familles de solutions non triviales au système (5.12) :

1. Solution de type 1 (T1) : $\exists! i \in E_7$ tel que $\mu_i \neq 0$ et $\forall j \in E_7 / \{i\}, \mu_j = 0$
L'équation du bas de (5.12) stipule donc que $\lambda_i = -2$ ainsi
 - Si $\Theta_i = 0$: Pas de solutions
 - Si $\Theta_i \neq 0$: $\mu_i = 2/\Theta_i$ et $\forall j \in E_7 / \{i\}, \lambda_j = -2m_{ji}/\Theta_i$
2. Solution de type 2 (T2) : $\exists! (i, j) \in E_7 \times (E_7 / \{i\})$ tel que $\{\mu_i, \mu_j\} \neq \{0, 0\}$ et $\forall k \in E_7 / \{i, j\}, \mu_k = 0$
L'équation du bas de (5.12) stipule donc que $\lambda_i = \lambda_j = -2$ ainsi
 - Si $\Theta_{i,j} = 0$: Pas de solutions
 - Si $\Theta_{i,j} \neq 0$: $\mu_i = \Delta_{2i}/\Theta_{i,j}$ et $\mu_j = \Delta_{2j}/\Theta_{i,j}$ puis $\forall k \in E_7 / \{i, j\}, \lambda_k = (m_{ki}\Delta_{2i} + m_{kj}\Delta_{2j})/\Theta_{i,j}$
3. Solution de type 3 (T3) : $\exists! (i, j, k) \in E_7 \times (E_7 / \{i\}) \times (E_7 / \{i, j\})$ tel que $\{\mu_i, \mu_j, \mu_k\} \neq \{0, 0, 0\}$ et $\forall l \in E_7 / \{i, j, k\}, \mu_l = 0$
L'équation du bas de (5.12) stipule donc que $\lambda_i = \lambda_j = \lambda_k = -2$ ainsi
 - Si $\Theta_{i,j,k} = 0$: Pas de solutions
 - Si $\Theta_{i,j,k} \neq 0$: $\mu_i = \Delta_{3i}/\Theta_{i,j,k}, \mu_j = \Delta_{3j}/\Theta_{i,j,k}$ et $\mu_k = \Delta_{3k}/\Theta_{i,j,k}$ puis $\forall l \in E_7 / \{i, j, k\}, \lambda_l = (m_{li}\Delta_{3i} + m_{lj}\Delta_{3j} + m_{lk}\Delta_{3k})/\Theta_{i,j,k}$

Compte-tenu du rang de la matrice M il n'existe pas d'autre solution non triviale. Il y en a déjà suffisamment, surtout lorsqu'on se souvient de ce que l'on va faire de ces solutions ...

Détermination des exposants de Kovalewskaya

Pour déterminer les exposants de Kovalewskaya nous devons procéder en trois étapes :

1. Spécifier le type d'Univers étudié : Cela revient à choisir un jeu de $n_{i=1,2,3}$ dans le tableau de la page 16. Si cet Univers est vide toutes les $7^{\text{ème}}$ composantes du formalisme précédemment développé seront inutilisées, la matrice de Kovalewskaya est donc d'ordre 12. Si par contre l'Univers contient un fluide barotropique, le paramètre Γ de cet univers ainsi que les constantes ε_o et χ restent dans les calculs et la matrice de Kovalewskaya est d'ordre 14. Signalons à cet instant, que des généralisations des résultats proposés ici sont possibles dans le cas de la prise en compte d'une constante cosmologique, d'une théorie à plus de trois dimensions d'espaces ou éventuellement dans la prise en compte d'une théorie scalaire tenseur de la relativité générale : Dans tous ces cas en effet, la dynamique de l'Univers homogène anisotrope reste modélisable par un réseau de Toda généralisé. Il "suffit" alors de rajouter le bon vecteur \mathbf{a}_n à la liste (5.9) associé à la bonne constante k_n et donc d'augmenter de 2 la dimension du problème et par induction celle de la matrice de Kovalewskaya ... Ce travail est en cours de réalisation.

Une fois spécifié le type d'Univers nous disposons d'une matrice M carrée d'ordre 6 dans le vide, 7 avec de la matière, et plus si affinité ...

2. Déterminer *tous* les déterminants mineurs d'ordre inférieur ou égal à 3 non nuls de M . A titre d'exemple pour motiver les courageux nous indiquons ci-dessous les mineurs concernés par le modèle B_{VIII} avec matière
 - $\Theta_{1,4,7}, \Theta_{1,3,6}, \Theta_{3,5,7}, \Theta_{2,3,6}, \Theta_{1,2,3}, \Theta_{2,4,7}, \Theta_{1,4,6}, \Theta_{2,3,7}, \Theta_{2,4,5}, \Theta_{1,5,7}, \Theta_{2,3,4},$
 $\Theta_{5,6,7}, \Theta_{2,5,6}, \Theta_{4,6,7}, \Theta_{3,6,7}, \Theta_{4,5,7}, \Theta_{1,5,6}, \Theta_{3,4,6}, \Theta_{1,2,7}, \Theta_{2,3,5}, \Theta_{1,3,4}, \Theta_{1,2,4},$
 $\Theta_{3,4,5}, \Theta_{1,2,5}, \Theta_{1,3,5}, \Theta_{4,5,6}, \Theta_{1,2,6}, \Theta_{2,6,7}, \Theta_{1,3,7}$
 - $\Theta_{2,5}, \Theta_{6,7}, \Theta_{3,7}, \Theta_{1,7}, \Theta_{1,3}, \Theta_{2,7}, \Theta_{1,6}, \Theta_{4,7}, \Theta_{2,3}, \Theta_{1,2}, \Theta_{3,4}, \Theta_{5,7}$
 - $\Theta_4, \Theta_5, \Theta_6, \Theta_7$

3. Pour chaque mineur, résoudre le système algébrique (5.12) afin de construire, conformément à la définition (5.7), la matrice de Kovalewskaia. Dans le cas de notre \mathbf{f} polynomial les calculs sont simples et fournissent

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & m_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{N1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & Id_N & \ddots & \vdots & \vdots & & M & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & m_{1N} & \cdots & \cdots & \cdots & m_{NN} \\ \mu_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_1 + 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mu_N & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_N + 2 \end{bmatrix}$$

Le cas $N = 6$ est celui de l'Univers vide, les vecteurs λ et μ du système (5.12) sont dans \mathbb{R}^6 , et K est carrée d'ordre 12. En présence de matière barotropique d'indice Γ , $N = 7$, il faut travailler dans \mathbb{R}^7 pour la résolution du système linéaire et K est d'ordre 14, etc ...

Tous les calculs ont été effectués en utilisant des procédures Maple afin de minimiser les risques d'erreur ... Les résultats sont rassemblés ci-après :

B_I	Vide	Matière
T1	\emptyset	E_γ
T2	\emptyset	\emptyset
T3	\emptyset	\emptyset

B_{II} et B_{IV}	Vide	Matière
T1	E_o	E_γ $-1, 3 - \frac{\Gamma}{2}, 2(\times 3), 4(\times 3), 1(\times 6)$
T2	\emptyset	$-1, 2, A_\pm, \frac{\gamma}{2}(\times 2), \gamma(\times 3), 1(\times 5)$
T3	\emptyset	\emptyset

$B_{III}, B_{VI,a}$ $B_{VII,a}$	Vide	Matière
T1	E_o	E_γ $-1, 3 - \frac{\Gamma}{2}, 2(\times 3), 4(\times 3), 1(\times 6)$
T2	\emptyset	$-1, 2, A_\pm, \frac{\gamma}{2}(\times 2), \gamma(\times 3), 1(\times 5)$ $-1, 2, B_\pm, 2\gamma, 0(\times 2), \gamma(\times 2), 1(\times 5)$
T3	\emptyset	$-1, 2, B_\pm, C_\pm, 1(\times 4), 2\gamma, 0, \gamma(\times 2)$ $-1, 2, B_\pm, 2\gamma, 0(\times 2), \gamma(\times 2), 1(\times 5)$

B_{VIII} et B_{IX}	Vide	Matière
T1	E_o	E_γ $-1, 3 - \frac{\Gamma}{2}, 2(\times 3), 4(\times 3), 1(\times 6)$
T2	$-1, -2(\times 3), 7^{\pm i}, 2(\times 2), 1(\times 4)$ $-1, 2, 15^{\pm i}, 1(\times 4), 0(\times 4)$	$-1, 2, A_\pm, \frac{\gamma}{2}(\times 2), \gamma(\times 3), 1(\times 5)$ $-1, 2, B_\pm, 2\gamma, 0(\times 2), \gamma(\times 2), 1(\times 5)$ $-1, -2(\times 3), 7^{\pm i}, 2(\times 2), 1(\times 5), 2\Gamma - 2$ $-1, -1 + \frac{3}{2}\Gamma, 2, 15^{\pm i}, 0(\times 4), 1(\times 5)$
T3	$-1, 2, 15^{\pm i}(\times 2), 1(\times 3), 0(\times 3)$ $-1, 2, 3^{\pm i}(\times 2), 1(\times 3), 0(\times 3)$ $-1, 2, 15^{\pm i}, 1(\times 4), 0(\times 4)$ $-1(\times 2), 2(\times 2), 7^{\pm i}, 1(\times 3), 0(\times 3)$	$-1, -1 + \frac{3}{2}\Gamma, 2, 3^{\pm i}(\times 2), 0(\times 3), 1(\times 4)$ $-1, 2, C_\pm, D_\pm, -2\gamma, 2\gamma(\times 3), 1(\times 4)$ $-1, -1 + \frac{3}{2}\Gamma, 2, 0(\times 3), 1(\times 4), 15^{\pm i}(\times 2)$ $-1, -1 + \frac{3}{2}\Gamma, 2, 0(\times 4), 1(\times 5), 15^{\pm i}$ $-1, 2, B_\pm, C_\pm, 1(\times 4), 2\gamma, 0, \gamma(\times 2)$ $-1(\times 2), -1 + \frac{3}{2}\Gamma, 7^{\pm i}, 2(\times 2), 0(\times 3), 1(\times 4)$ $-1, 2, B_\pm, 2\gamma, 0(\times 2), \gamma(\times 2), 1(\times 5)$

sous l'hypothèse $0 \leq \Gamma < 2$, on a posé, $\gamma = (3\Gamma - 2)/(\Gamma - 2)$, pour $\alpha = 3, 5$ et 7 , on note $2\alpha^{\pm i} = 1 \pm i\sqrt{\alpha}$,

$$\begin{aligned} 2A_\pm &= 1 \pm \sqrt{\frac{16-22\Gamma+3\Gamma^2}{4-2\Gamma}} & 2B_\pm &= 1 \pm \sqrt{5-6\Gamma} \\ 2C_\pm &= 1 \pm \sqrt{\frac{25\Gamma-18}{\Gamma-2}} & 2D_\pm &= 1 \pm \sqrt{\frac{18-41\Gamma+24\Gamma^2}{2-\Gamma}} \end{aligned}$$

et

$$E_\gamma := \{-1, 2, 1(\times 6), \frac{2\gamma}{3}(\times 6)\} \quad E_o := \{-1, 4(\times 3), 2(\times 3), 1(\times 5)\}$$

Analyse des exposants et conclusions

Dans le vide, rien ne semble s'opposer à l'intégrabilité des équations de la dynamique des Univers de Bianchi de type I à VII (exposants entiers). Par contre, la présence d'exposants complexes dans la dynamique des Univers de type B_{VIII} et B_{IX} rend ces modèles non intégrables. La présence d'un fluide barotropique complique singulièrement l'analyse (nous restreignons l'étude au cas physique : $0 \leq \Gamma \leq 2$) :

- Dans le cas d'un fluide de matière raide ($\Gamma = 2 \Rightarrow \gamma = 0$), la matrice (5.13) se réduit à celle du vide bordée d'une ligne et d'une colonne de 0, les systèmes correspondants jouissent donc des mêmes propriétés d'intégrabilité que leurs contreparties vides.
 - Systèmes B_I et B_V : le seul exposant pouvant poser des problèmes est $2k/3$. Cette quantité demeure rationnelle pour $\Gamma \in \mathbb{Q}$: Les valeurs raisonnables de Γ , c'est-à-dire $\Gamma = 0$ (champ scalaire), $\Gamma = 1$ (poussière), $\Gamma = 4/3$ (gaz parfait quantique), $\Gamma = 5/3$ (gaz parfait classique), ou le cas déjà évoqué de la matière raide correspondent donc à des cas d'intégrabilité de ces modèles.
 - Systèmes B_{II} et B_{IV} : Les exposants de la famille E_γ sont rationnels si $\Gamma \in \mathbb{Q}$, le problème vient cependant de A_\pm qui est complexe pour $\Gamma \in]\Gamma_o = \frac{11+\sqrt{73}}{3} \simeq 0.82, 2[$ et presque partout irrationnel pour $\Gamma \in [0, \Gamma_o]$, le seul cas d'intégrabilité physique est celui du champ scalaire $\Gamma = 0$, pour lequel $A_\pm = -1/2$ ou $3/2$.
 - Systèmes B_{III} , $B_{VI_o,a}$ ou $B_{VII_o,a}$: L'adjonction des termes $0, B_\pm$ et C_\pm ne change rien à l'intégrabilité des cas physiques. B_\pm n'est plus réel dès que $\Gamma \geq 5/6$ et C_\pm dès que $\Gamma \geq 18/25$. Le cas du champ scalaire n'est plus intégrable car pour $\Gamma = 0$, $C_\pm = -1$ ou 2 , mais $B_\pm = 1/2 \pm \sqrt{5}/2$ n'est pas rationnel ... La seule possibilité pourrait être l'existence d'intégrales premières transcendentes ...
 - Les systèmes B_{VIII} , B_{IX} souffrent déjà de non intégrabilité dans le cas vide ...
- Nantis de ces précieuses informations d'intégrabilité, notre programme est désormais clairement établi :
- Nous tenterons donc la recherche d'une solution générale analytique dans le cas B_I ou B_V vide ou avec matière ainsi que dans le cas B_{II} ou B_{IV} vide ou avec champ scalaire ;
 - Nous tenterons d'éclaircir le mystère des dynamiques B_{VI} et B_{VII} ;
 - Nous clarifierons numériquement les propriétés des dynamiques B_{VI} et B_{VII} ;

5.1.3 Compléments algébriques

Les résultats d'intégrabilité obtenus dans la section précédente peuvent être complétés ou étayés par une approche plus algébrique basée sur les résultats obtenus par la communauté des dynamiciens sur les réseaux de Toda (On trouvera un condensé de ces résultats dans l'ouvrage de A.M. Perelomov [46]).

L'outil principal à la base de ces investigations est un théorème

Théorème 2 Soit $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E muni d'une forme notée $(,)$. Si Π constitue un système de racines simples d'une algèbre de Lie alors le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^n g_i e^{2(\alpha_i, q_i)}$$

engendre une dynamique complètement intégrable pour les variables canoniquement conjuguées $(q_{i=1\dots n}, p_{i=1\dots n})$.

L'idée cachée sous ce théorème (voir [46]) est la suivante : Si les conditions très restrictives permettant d'obtenir un système radiciel d'algèbre de Lie sont réunies (voir annexe), la dynamique admet une représentation de Lax. Cette caractéristique assure l'existence d'un changement de variable pour lequel la dynamique s'écrit matriciellement

$$\frac{dL}{dt} = [L, M] = LM - ML$$

Il est alors facile de montrer que les valeurs propres de la matrice L et donc les fonctions

$$I_{k=1\dots n} = \frac{1}{k} \text{tr} (L^k)$$

sont des intégrales premières du mouvement, dont le nombre est suffisant pour assurer la partition complète de l'espace des phases du système et donc son intégrabilité.

Les résultats obtenus dans ce domaine sont encourageants, demeurent très préliminaires, et sont en cours de développement :

- Le hamiltonien (5.10) est tout à fait semblable à celui évoqué par Perelomov, il contient cependant une différence fondamentale : La forme utilisée pour le produit scalaire des impulsions dans le hamiltonien de Bianchi ne possède pas de signe déterminé. Comme nous l'avons fait remarquer plus haut, c'est une caractéristique essentielle des univers homogènes. Faute de mieux, nous avons fait l'hypothèse que ceci ne modifie pas en profondeur les conclusions du théorème 2.
- Sous la restriction ci-dessus, nous avons pu apporter une preuve algébrique de l'intégrabilité des Univers B_I , B_{II} , B_{IV} et B_V vides, ainsi que B_I et B_V avec matière barotrope (pour tout $\Gamma \in [0, 2]$).
- Des indications précises d'intégrabilité semblent pouvoir être mises en avant dans le contexte des Univers B_{VI} et B_{VII} vides : un lien avec des algèbres de type A_n semble effectif contre des hypothèses plausibles mais encore sous investigation.
- La non intégrabilité des modèles B_{VIII} et B_{IX} semble confirmée, sans qu'une preuve complète puisse être mise en avant par ce type de méthodes.

Globalement, ces investigations algébriques récentes semblent donc s'accorder avec les résultats obtenus à l'aide des exposants de Kovalewskaya. Il nous paraît évident qu'un lien étroit existe entre ces deux approches, dans l'état d'avancement de nos recherches sur ce sujet, nous ne pouvons cependant pas en dire plus.

5.2 Quelques solutions analytiques et une conjecture

5.2.1 Propriétés du volume de l'Univers

La composante temporelle des équations de la dynamique ne dépend pas du type d'anisotropie considéré, comme nous l'avons vu (cf. équation (4.16)), elle s'écrit pour un gaz parfait sans hypothèse sur l'équation d'état

$$\chi V^2 (3P + \epsilon) = -(\ln(V^2))'' + \frac{1}{2} \left((\ln(V^2))' \right)^2 - \frac{1}{2} (A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2) \quad (5.14)$$

Dans cette équation la fonction lapse $N(\tau) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2} = V$ et le temps conforme τ tel que $dt = N(\tau) d\tau$ ont été adoptés. Le $'$ désigne la dérivation par rapport à τ , le point désigne la dérivation par rapport à t .

Une petite analyse est alors possible : Pour toute fonction f du temps conforme τ seul, on a

$$f' = \frac{df}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{df}{dt} = V f \quad (5.15)$$

un simple calcul montre alors que

$$(\ln(V^2))'' = V V' (\ln V^2)' + V^2 (\ln V^2)''$$

et

$$\frac{1}{2} \left((\ln(V^2))' \right)^2 = \frac{V^2}{2} \ln(V^2)' \ln(V^2)' = \frac{V^2}{2} \frac{2V V'}{V^2} \ln(V^2)' = V V' (\ln V^2)'$$

ainsi en injectant ces deux petits résultats dans (5.14) il vient

$$(\ln V^2)'' = -\chi (3P + \epsilon) - \frac{1}{2} \frac{(A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2)}{V^2} \quad (5.16)$$

Le volume de l'Univers \mathcal{V} est comme nous l'avons vu proportionnel à V (cf. relation (4.21)). Si $3P + \epsilon > 0$, ce qui est le cas de la matière ordinaire, la relation (5.16) indique donc que $(\ln \mathcal{V})'' < 0$. Nous en déduisons 2 propriétés importantes du volume :

- Si $(\ln \mathcal{V})'' < 0$ alors \mathcal{V}'/\mathcal{V} est strictement décroissante. Pour $t > 0$, \mathcal{V} est une fonction strictement positive du temps, ainsi \mathcal{V}' ne peut s'annuler au plus qu'une seule fois.
- Si $(\ln \mathcal{V})'' < 0$ alors $\mathcal{V} \mathcal{V}' < (\mathcal{V}')^2$. L'existence d'un minimum local de la fonction \mathcal{V} , qui impliquerait simultanément $\mathcal{V}' = 0$ et $\mathcal{V}'' > 0$, est donc exclue.

En conséquence après un épisode transitoire où il peut éventuellement passer par un maximum, le volume de l'univers est une fonction monotone du temps. Ainsi comme pour l'Univers homogène trois cas sont envisageables : Univers fermé avec 2 singularités, une de type Big-Bang et une de type Big-Crunch (Figure 5.2-gauche), Univers asymptotiquement plat avec une singularité de type Big-Bang (Figure 5.2-centre) et Univers ouvert avec une singularité de type Big-Bang (Figure 5.2-droite).

Le volume des Univers anisotropes n'est donc pas une fonction oscillante.

La singularité ouverte du début des univers de Friedmann persiste donc à l'extension anisotrope. Comme nous allons le voir dans les prochains chapitres c'est sa nature qui va changer de façon drastique ...

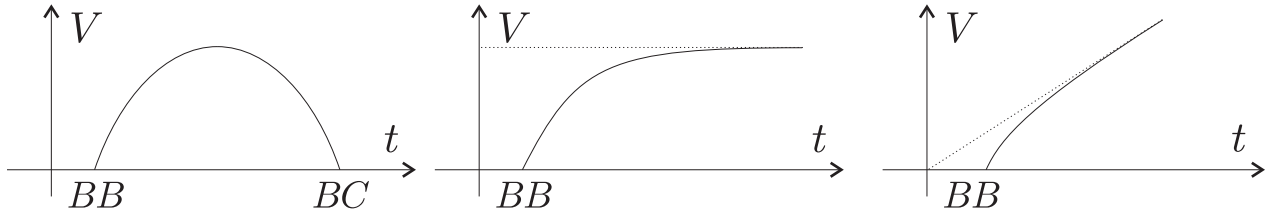


FIG. 5.2 – Différents comportements possibles pour du volume d'un Univers anisotrope modélisé par la relativité générale et dont le contenu matériel vérifie la condition $3P + \epsilon > 0$.

5.2.2 Dynamique de l'Univers B_i

Formalisme Hamiltonien : Le comportement

La dynamique de l'Univers B_i contenant un fluide barotropique est décrite par le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2} (p_3^2 - p_1^2 - p_2^2) - 4\chi\epsilon_o e^{\frac{\sqrt{6}}{4}(2-\Gamma)q_3} = 0$$

Les équations (4.33) de cette dynamique montrent que les variables q_1 et q_2 sont cycliques. Il vient immédiatement

$$\begin{aligned} q_1(\tau) &= a\tau + k_1 & \text{et} & & p_1 &= a = \text{cste} \\ q_2(\tau) &= b\tau + k_2 & \text{et} & & p_2 &= b = \text{cste} \end{aligned}$$

L'évolution de la variable q_3 , proportionnelle au logarithme du volume V (cf. équation (4.29)), est moins triviale mais demeure accessible : Les équations de Hamilton associées à la dynamique sont pour cette variable

$$q_3' = p_3, \quad p_3' = -\frac{\partial H}{\partial q_3} \implies q_3'' = K^2 e^{\alpha q_3} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = \sqrt{6}(2-\Gamma)/4 \\ K^2 = \sqrt{6}\chi\epsilon_o(2-\Gamma) \end{cases} \quad (5.17)$$

En multipliant cette équation par q_3' , elle perd un ordre par intégration et devient

$$\frac{1}{2} (q_3')^2 = \frac{K^2}{\alpha} e^{\alpha q_3} + \lambda \quad (5.18)$$

Sans contrainte sur les conditions au bord, la constante d'intégration λ n'est pas forcément positive mais vérifie seulement $\lambda > -\frac{K^2}{\alpha} e^{\alpha q_3(\tau)}$ pour tout τ . Si l'on impose au volume de s'annuler en la singularité temporelle mise en évidence dans la section précédente, c'est-à-dire³

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} V(\tau) = 0 \quad \text{ou bien} \quad \lim_{\tau \rightarrow -\infty} q_3(\tau) = -\infty$$

alors $\lambda \geq 0$ et l'équation (5.18) s'intègre quasi instantanément pour donner

$$q_3(\tau) = \frac{2}{\alpha} \left\{ \ln \left(\frac{\lambda}{8\chi\epsilon_o} \right) - \ln \left(\text{sh} \left[\pm \sqrt{\lambda} (\tau - \mu) \right] \right) \right\}$$

Ou μ est une dernière constante d'intégration que rien n'empêche d'annuler⁴. Pour $\tau \rightarrow -\infty$, la fonction q_3 est asymptotiquement affine (comme ses congénères q_1 et q_2). Sans présence de matière, q_3 qui vérifie une équation de la forme $q_3'' = 0$ est directement affine. L'introduction de matière dans l'Univers B_i ne change pas globalement la dynamique et ne la perturbe que sur un temps exponentiellement faible⁵.

En revenant à la définition (4.29) de q_3 on peut obtenir le volume en fonction de τ

$$V(\tau) = \left(\frac{\lambda}{8\chi\epsilon_o \text{sh}^2(\sqrt{\lambda}\tau)} \right)^{1/(2-\Gamma)}$$

On peut même avoir un lien asymptotique entre le temps conforme τ et le temps tout-court : Pour $\tau \rightarrow -\infty$ ⁶ il vient

$$\tau \propto \ln(t) \quad (5.19)$$

La singularité temporelle primordiale ($t = 0$) est bien rejetée à l'infini négatif pour le temps conforme.

³Comme nous le verrons plus loin (voir (5.19)) la limite $t \rightarrow 0$ est associée à $\tau \rightarrow -\infty$

⁴Prendre $\mu = 0$ revient à fixer la valeur du volume à un nombre positif pour un temps positif.

⁵Cette propriété se généralise plus ou moins rigoureusement pour chaque Univers de Bianchi pourvu que la matière soit barotropique et $\Gamma \in [0, 2[$. Le cas de la matière raide ($\Gamma = 2$) est pathologique et peut modifier la dynamique de l'Univers qui l'abrite

⁶Ce comportement est d'ailleurs aussi valide pour $\tau \rightarrow +\infty$.

Formalisme BKL : La solution de Kasner

En présence de matière barotropique En présence de matière barotropique et dans le formalisme originel de Belinski-Khalatnikov et Lifschitz (BKL voir [1] ou [35]), les équations de la dynamique de l'Univers B_1 s'écrivent (cf. (4.25))

$$\begin{cases} A_1'' = \chi\epsilon_o (2 - \Gamma) V^{2-\Gamma} \\ A_2'' = \chi\epsilon_o (2 - \Gamma) V^{2-\Gamma} \\ A_3'' = \chi\epsilon_o (2 - \Gamma) V^{2-\Gamma} \\ A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' = 4\chi\epsilon_o V^{2-\Gamma} \end{cases} \quad (5.20)$$

En introduisant les constantes $k_1 = A_1' - A_2'$, $k_2 = A_2' - A_3'$ et $k_3 = A_3' - A_1'$ liées par l'équation

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0 \quad (5.21)$$

On peut injecter les 3 premières équations intégrées une fois chacune dans la 4^{me} équation qui devient une équation de Ricatti unidimensionnelle pour chacune des dérivées des inconnues du problème. Pour la fonction A_1 , nous avons par exemple

$$3A_1'^2 + 2(k_3 - k_1) A_1' - k_1 k_3 = \frac{4}{2 - \Gamma} A_1''$$

Il est toujours possible d'intégrer ce type d'équation si l'on connaît une solution particulière. Une fonction linéaire fait ici bien l'affaire : La nouvelle fonction $f_1 = A_1' - a_1$, avec a_1 racine réelle du polynôme

$$P_1(X) = 3X^2 + 2(k_3 - k_1)X - k_1 k_3 = 0$$

vérifie une équation de Bernoulli de la forme

$$3f_1^2 + [6a_1 + 2(k_3 - k_1)]f_1 = \frac{4}{2 - \Gamma} f_1'$$

que l'on intègre facilement en posant $g_1 = 1/f_1$. Tous calculs faits, on trouve pour tout $i = 1, 2, 3$ modulo 3 (i.e. $0 = 3, 4 = 1, \dots$)

$$A_i' = a_i + \frac{K_i}{K_i \lambda_i \exp[-(2 - \Gamma) K_i \tau / 4] - 3} \quad (5.22)$$

où les λ_i sont des constantes d'intégration, les a_i des racines réelles des polynômes $P_i(X) = 3X^2 + 2(k_{i-1} - k_i)X - k_i k_{i-1} = 0$ et $K_i = 6a_i + 2(k_{i-1} - k_i)$ soit, plus explicitement

$$3a_i = k_i - k_{i-1} \pm \sqrt{k_i^2 + k_{i-1}^2 + k_i k_{i-1}}$$

$$K_i = \pm 2\sqrt{k_i^2 + k_{i-1}^2 + k_i k_{i-1}}$$

Les 3 premières équations de la dynamique imposent alors que pour tout $i = 1, 2, 3$ on ait $A_i' = \chi\epsilon_o (2 - \Gamma) V^{2-\Gamma}$ ce qui se traduit par

$$\forall i = 1, 2, 3 \quad \frac{2 - \Gamma}{4} \lambda_i K_i^3 \frac{K_i}{(\lambda_i K_i \exp[-(2 - \Gamma) K_i \tau / 4] - 3)^2} = \chi\epsilon_o (2 - \Gamma) V^{2-\Gamma}$$

Il est facile de montrer que l'on ne peut réaliser cet exploit qu'à condition d'avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ et $K_1 = K_2 = K_3 := K$. Tout va donc bien car cette dernière contrainte, adjointe à (5.21), ne laisse plus qu'un degré de liberté au triplet (k_1, k_2, k_3) qui se voit réduit à

$$(k_1, k_2, k_3) = \left\{ k \in R_+, \quad \left| \begin{array}{l} k_3 = k \\ k_2 = \{x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + kx + k^2 - K^2 = 0\} \\ k_1 = -k_2 - k \end{array} \right. \right\}$$

On peut alors raisonnablement finir le travail d'intégration qui donne

$$A_i(\tau) = \left(a_i - \frac{(2 - \Gamma) K}{4} \right) \tau + \mu_i - \frac{4}{3(\Gamma - 2)} \ln \left(K \exp \left[\frac{-(2 - \Gamma) K \tau}{4} \right] - 3 \right)$$

Où les μ_i sont 3 nouvelles constantes d'intégration. Les conditions initiales doivent donc permettre un choix de K tel que $K \exp \left[-\frac{(2 - \Gamma) K \tau}{4} \right] > 3$, une fois la période initiale passée, l'exponentielle l'emporte sur le 3 et la solution devient rapidement asymptotiquement affine. Comme l'indiquait le formalisme hamiltonien ...

Le cas du vide La solution vide est dans le formalisme BKL est à la fois simple et riche. Elle mérite une étude détaillée.

Si $\epsilon_o = 0$, les équations (5.20) admettent des solutions affines

$$A_i = a_i \tau + \mu_i$$

Où les a_i et les μ_i sont des constantes d'intégration. On peut cependant en dire beaucoup plus sur ces solutions : L'équation $A_i'' = 0$ et le fait que $\alpha_i = \ln A_i$ permettent d'écrire que (cf. (5.15))

$$(VA_i)' = 0 \iff \exists k_i \in \mathbb{R}, \quad VA_i = k_i \iff \text{Si } V \neq 0, \quad \alpha_i = \frac{k_i}{V} \alpha_i \quad (5.23)$$

Du fait que $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$, la relation (5.23) s'écrit finalement

$$V' = \frac{1}{2} (k_1 + k_2 + k_3) := \frac{\Omega}{2} \quad \text{soit} \quad V = \frac{\Omega}{2} t + \Omega_o \quad (5.24)$$

La constante Ω_o doit être choisie nulle si l'on veut que volume et temps s'annulent simultanément. Il vient donc pour les facteurs d'échelles

$$\alpha_i = \lambda_i t^{2k_i/\Omega} \quad (5.25)$$

les constantes positives λ_i ne sont pas liées autrement que par la définition du volume qui donne $4\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \Omega^2$. En injectant le résultat (5.25) dans la composante temps des équations d'Einstein (équation du bas de (5.20) dans le vide), une autre contrainte sur les k_i fait son apparition, $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \Omega^2$. En ajoutant cette relation à la définition (5.24) du taux de variation du volume, il est possible de paramétrer les k_i :

$$\begin{aligned} p_1 &:= k_1/\Omega = -\frac{u}{(1+u+u^2)} \\ p_2 &:= k_2/\Omega = \frac{(1+u)}{(1+u+u^2)} \quad \text{avec } u \in [1, +\infty[\\ p_3 &:= k_3/\Omega = \frac{u(1+u)}{(1+u+u^2)} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Il est facile de remarquer que tout choix du paramètre réel u conduit à

$$-\frac{1}{3} \leq p_1 < 0 < p_2 \leq \frac{2}{3} \leq p_3 < 1$$

Ainsi, à l'approche de la singularité et donc à rebours du temps t , le facteur d'échelle associé à α_1 *croît* exponentiellement à taux constant alors que ceux associés à α_2 et α_3 *décroissent* exponentiellement à taux constant. Le volume décroissant linéairement à vitesse constante. La métrique associée

$$ds^2 = \lambda_1 t^{2p_1} dx_1^2 + \lambda_2 t^{2p_2} dx_2^2 + \lambda_3 t^{2p_3} dx_3^2 - dt^2$$

est une solution connue des équations d'Einstein, due à E. Kasner (1921).

Les constantes λ_i peuvent être incorporées dans la définition des vecteurs de base associés aux axes du repère. La donnée d'une valeur de l'indice de Kasner $u \in [1, +\infty[$ et d'une valeur de taux de variation du volume Ω permet donc de définir de façon univoque ce qu'il est convenu d'appeler une ère ou un état de Kasner.

5.2.3 Dynamique de l'Univers B_{II} ou B_{IV}

Les Univers B_{II} ou B_{IV} semblent posséder une dynamique beaucoup plus complexe. Nous traiterons le cas B_{II} vide car, comme nous l'a indiqué notre étude préliminaire sur l'intégrabilité des dynamiques des Univers de Bianchi, l'adjonction de matière devient sans doute rédhibitoire, sauf dans le cas d'un champ scalaire.

En variables BKL, les équations de la dynamique s'écrivent dans le vide

$$\begin{cases} A_1'' &= -e^{2A_1} \\ A_2'' &= e^{2A_1} \\ A_3'' &= e^{2A_1} \\ \alpha_1^2 &= A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2' \end{cases} \quad (5.27)$$

Une fois la première équation résolue, les 2 suivantes tomberont et la dernière pourra contraindre les constantes. L'œil désormais avisé de notre lecteur reconnaîtra dans cette équation une forme semblable au signe près, à celle

rencontrée pour la dynamique B_I avec matière en formulation hamiltonienne (cf. équation (5.17)). Les mêmes techniques d'intégration donnent ici

$$\alpha_1 = e^{A_1} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\text{ch} \left[\sqrt{\lambda} (\tau - \mu) \right]}$$

ou 2 constantes d'intégrations $\lambda \in [1, +\infty[$ et $\mu \in \mathbb{R}$, apparaissent. Comme promis les deux équations du milieu de (5.27) fournissent après quelques manipulations en trigonométrie hyperbolique

$$\alpha_{2,3} = e^{A_{2,3}} = \mu_{2,3} e^{\tau \lambda_{2,3}} \text{ch} \left[\sqrt{\lambda} (\tau - \mu) \right]$$

On peut toujours fixer $\mu = 0$ ce qui revient à imposer l'instant où le logarithme du temps ($\propto \tau$) s'annule. Les constantes $\mu_{2,3}$ peuvent sans problème être incorporées dans les fonctions de base ω^2 et ω^3 du tableau de la page 16. Il est alors possible de prendre en compte la contrainte associée à la composante temporelle des équations de la dynamique. Après de modestes calculs, celle-ci se résume à $\lambda_2 \lambda_3 = \lambda \geq 1$.

La solution des équations de la dynamique B_{II} s'écrit donc

$$\begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{\lambda} / \text{ch} \left(\sqrt{\lambda} \tau \right) \\ \alpha_2 = e^{\lambda_2 \tau} \text{ch} \left(\sqrt{\lambda} \tau \right) \\ \alpha_3 = e^{\lambda_3 \tau} \text{ch} \left(\sqrt{\lambda} \tau \right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda \in [1, +\infty[\\ \lambda_2 = \lambda / \lambda_3 \end{cases}$$

Il est clair que le volume $V = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^{1/2}$ est exponentiellement proportionnel à τ , le temps conforme peut donc être relié au temps physique

$$dt = V d\tau \Rightarrow t \propto e^\tau$$

Dans le problème de l'approche vers la singularité la condition initiale sera fixée pour un temps positif et donc dans une limite $\tau \rightarrow +\infty$, la condition finale correspondra quant à elle à une limite $\tau \rightarrow -\infty$. Étudions ces deux cas limites plus en détail :

– État asymptotique droit (Conditions initiales, $\tau \gg 1$)

Dans la limite $\tau \rightarrow +\infty$, un développement limité du cosinus hyperbolique donne à l'ordre 1

$$\alpha_1 \propto e^{-\sqrt{\lambda} \tau}, \quad \alpha_2 \propto e^{(\lambda_2 + \sqrt{\lambda}) \tau}, \quad \alpha_3 \propto e^{(\lambda_3 + \sqrt{\lambda}) \tau}$$

Le système est donc dans un état de Kasner de paramètres (voir 5.26)

$$k_1 = -\sqrt{\lambda}, \quad k_2 = \sqrt{\lambda} + \lambda_2, \quad k_3 = \sqrt{\lambda} + \lambda_3 \quad \text{et} \quad \Omega = \lambda_2 + \lambda_3 + \sqrt{\lambda}$$

quel miracle⁷ !

– État asymptotique droit (Conditions finales, $\tau \ll 1$)

Dans la limite $\tau \rightarrow -\infty$, un développement limité du cosinus hyperbolique donne à l'ordre 1

$$\alpha_1 \propto e^{\sqrt{\lambda} \tau}, \quad \alpha_2 \propto e^{(\lambda_2 - \sqrt{\lambda}) \tau}, \quad \alpha_3 \propto e^{(\lambda_3 - \sqrt{\lambda}) \tau}$$

Il s'agit là encore d'un état de Kasner dont les paramètres sont à présent

$$k'_1 = \sqrt{\lambda}, \quad k'_2 = \lambda_2 - \sqrt{\lambda}, \quad k'_3 = \lambda_3 - \sqrt{\lambda} \quad \text{et} \quad \Omega' = \lambda_2 + \lambda_3 - \sqrt{\lambda}$$

Notons que momentanément le $'$ ne désigne plus la dérivée par rapport à τ . Une question devient brûlante : Existe-t-il une relation entre ces deux états de Kasner asymptotiques. La réponse fut apportée avec tout le problème dans les articles fondateurs du formalisme BKL ([1],[35]). Les propriétés de l'état de Kasner font que, pour l'état initial

$$\exists! u \in [1, +\infty[\quad \text{tel que} \quad \begin{cases} p_1 = \frac{k_1(u)}{\Omega} = \frac{-u}{1+u+u^2} \\ p_2 = \frac{k_2(u)}{\Omega} = \frac{1+u}{1+u+u^2} \\ p_3 = \frac{k_3(u)}{\Omega} = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2} \end{cases}$$

⁷Ceux qui ne croient pas aux miracles peuvent toujours s'assurer que, comme dans tout état kasnérien

$$\Omega = k_1 + k_2 + k_3 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$$

et pour l'état final

$$\exists ! v \in [1, +\infty[\text{ tel que } \begin{cases} p'_1 = \frac{k'_1(v)}{\Omega'} = \frac{-v}{1+v+v^2} \\ p'_2 = \frac{k'_2(v)}{\Omega'} = \frac{1+v}{1+v+v^2} \\ p'_3 = \frac{k'_3(v)}{\Omega'} = \frac{v(1+v)}{1+v+v^2} \end{cases}$$

La remarque triviale $\Omega' = \Omega - 2\sqrt{\lambda}$ permet de prouver que les deux ères de Kasner sont reliées par une transition $v = u - 1$. Un simple calcul permet de voir que pour tout $i = 1, 2, 3$ on a $p'_i(1/u) = p_i(u)$. Ainsi pour une valeur de $u \in [1, 2[$ décrivant l'état kasnérien gauche, on peut toujours associer une valeur de $v = 1/(u - 1)$ permettant de préserver la contrainte $v \in [1, +\infty[$ inhérente à l'état kasnérien droit. Une représentation graphique des p_i et des p'_i est l'objet de la figure 5.3.

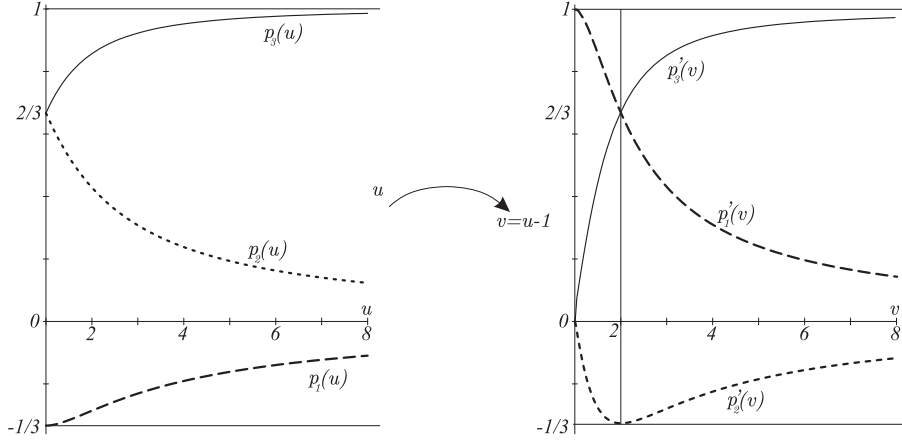


FIG. 5.3 – Transition entre les deux régimes asymptotiquement kasnériens de la dynamique B_{II} .

L'état initial des Univers B_{II} ou B_{IV} est donc un état asymptotiquement kasnérien décrit par le couple $(\Omega ; u)$ tel que

$$-\frac{1}{3} \leq \frac{k_1(u)}{\Omega} < 0 < \frac{k_2(u)}{\Omega} \leq \frac{2}{3} \leq \frac{k_3(u)}{\Omega} < 1$$

et l'état final asymptotique (singularité) est un autre état kasnérien décrit par le couple $(\Omega' ; v)$ avec $\Omega' = \Omega + 2k_1(u)$ et

$$\begin{cases} v = u - 1 \text{ et } -\frac{1}{3} \leq \frac{k_2(v)}{\Omega'} < 0 < \frac{k_3(v)}{\Omega'} \leq \frac{2}{3} \leq \frac{k_1(v)}{\Omega'} < 1 & \text{Si } u \in]2, +\infty[\\ v = (u - 1)^{-1} \text{ et } -\frac{1}{3} \leq \frac{k_2(v)}{\Omega'} < 0 < \frac{k_1(v)}{\Omega'} \leq \frac{2}{3} \leq \frac{k_3(v)}{\Omega'} < 1 & \text{Si } u \in [1, 2] \end{cases} \quad (5.28)$$

La dynamique B_{II} vide se résume donc par une transition entre 2 état kasnérien parfaitement définis. C'est certainement ce résultat magnifique, obtenu par le groupe BKL dans les années 70, qui est en partie à l'origine de l'intérêt suscité par les Univers de Bianchi.

5.2.4 Conjecture BKL pour l'Univers B_{IX}

La dynamique de l'Univers B_{IX} (ou B_{VIII}) est certainement la plus complexe. Dans le formalisme BKL avec matière barotropique, elle est décrite par le système (voir 4.25)

$$\begin{cases} 0 &= E_c + E_p + E_{mb} \\ A_1'' &= (e^{A_2} - e^{A_3})^2 - e^{2A_1} + \chi \epsilon_o V^{2-\Gamma} (2 - \Gamma) \\ A_2'' &= (e^{A_3} - e^{A_1})^2 - e^{2A_2} + \chi \epsilon_o V^{2-\Gamma} (2 - \Gamma) \\ A_3'' &= (e^{A_1} - e^{A_2})^2 - e^{2A_3} + \chi \epsilon_o V^{2-\Gamma} (2 - \Gamma) \end{cases} \quad (5.29)$$

Dans le vide, $\epsilon_o = 0$, ce système se prête à une analyse remarquable introduite dès les années 1970 par l'école russe BKL (voir [1], [35]). Les A_i correspondent aux logarithmes des facteurs d'échelles. En vertu des propriétés dynamiques du volume de l'Univers, a priori, lorsque l'on se rapproche de la singularité, ces derniers deviennent de plus en plus négatifs, de sorte que les seconds membres des trois dernières équations de (5.29) sont quasiment nuls. La dynamique pourrait donc être similaire à celle des équations (5.20) de l'Univers B_I .

Faisons donc l'hypothèse qu'à un instant positif t_o , les trois variables A_i soient telles que

$$A_i \propto e^{2k_i t/\Omega}$$

avec (k_i, Ω) définissant un état de Kasner : L'un des k_i (par exemple k_1) sera négatif et verra s'élargir l'axe associé à l'approche de la singularité ($A_1 \nearrow$), les deux autres associés aux k_i positifs verront dans la même limite leurs deux axes se contracter (A_2 et $A_3 \searrow$). Si l'état kasnérien de l'instant t_o est approximativement correct, cela ne va pas durer.

En se rapprochant de la singularité l'axe A_1 va voir son importance dynamique croître et il ne sera très rapidement plus possible de le négliger. Dans le même temps l'erreur commise sur les deux autres axes deviendra de plus en plus négligeable ... Il paraît donc judicieux de remplacer un temps, la dynamique par celle de l'Univers B_{II} dans laquelle un seul axe est pris en compte. C'est alors que notre travail analytique se révèle payant : Nous avons montré qu'une dynamique B_{II} dans laquelle l'axe subsistant est celui associé au $k_i < 0$ d'un état kasnérien assurait la transition vers un autre état kasnérien parfaitement déterminé et pour lequel l'axe en expansion changeait, ce nouvel état paraît donc voué au même transit que son prédécesseur ... L'approche de la singularité dans la dynamique B_{IX} vide semble donc claire : Tout le temps nécessaire étant disponible ($\tau \rightarrow -\infty$) la singularité de l'Univers B_{IX} vide ne sera atteinte qu'après une succession infinie d'ères de Kasner décrites par la transition associée à la dynamique B_{II} (voir (5.28)). C'est la conjecture BKL.

La présence de matière Barotropique ne change notablement la dynamique, comme le montre nos solutions exactes B_I , l'introduction de matière ($\Gamma < 2$) devient négligeable dans la limite $\tau \rightarrow -\infty$. Le cas de la matière raide est plus sournois : Dans ce cas précis(cf. [3]), l'état kasnérien est tel que

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 > 1$$

la dynamique B_{II} met en évidence une possible transition vers un état décrit par trois p_i positifs et donc trois axes en contraction. État qui ne permet plus d'assurer la transition ...

Cette conjecture est à l'origine d'une multitude de travaux dans tous les domaines tant mathématiques, que physiques ou numériques. Depuis le colossal article d'Hans Ringström [31], on peut considérer que la conjecture BKL n'en n'est plus une mais constitue bel et bien un théorème :

Théorème 3 *En présence d'un fluide parfait raide, la solution générale des équations converge un unique point pour tout type de classe A de Bianchi. Pour tout autre idéalisation du contenu matériel, les solutions de type IX de Bianchi convergent de manière générique vers un attracteur qui consiste en la fermeture de toutes les trajectoires de type II de Bianchi.*

Le problème de la dynamique des Univers anisotropes en relativité générale est donc complètement résolu d'un point de vue mathématique. La grande technicité de l'article de Ringström laisse cependant la place à de nombreux travaux tant sur plan numérique que dans une caractérisation plus précise de l'attracteur. Ces deux points seront l'objet des chapitres suivants.

5.3 Dynamique par le formalisme hamiltonien

Le formalisme Hamiltonien introduit dans la section 4.3 se prête à une analyse introduite initialement par C.W. Misner [2], et qui s'est développée conjointement avec le formalisme BKL . Nous formulerons ce problème selon la technique présentée par Uggla (eg. [38] section 3.2, page 226), en proposant toutefois des résultats étendus.

5.3.1 Super temps et dynamique 2D

Le Hamiltonien associé à la dynamique des espaces homogènes vides s'écrit

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sigma_i p_i^2 + e^{\frac{\sqrt{6}}{3} q_3} \xi(q_1, q_2) = 0 \quad (5.30)$$

avec $\sigma = [-1. -1. +1]^T$ et

$$\begin{aligned} \xi(q_1, q_2) = & -n_1^2 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{3} q_2 + \sqrt{2} q_1\right)} - n_2^2 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{3} q_2 - \sqrt{2} q_1\right)} - n_3^2 e^{-\frac{2\sqrt{6}}{3} q_2} \\ & + 2n_1 n_2 e^{\frac{\sqrt{6}}{3} q_2} + 2n_1 n_3 e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} q_1 - \frac{\sqrt{6}}{6} q_2\right)} + 2n_2 n_3 e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} q_1 + \frac{\sqrt{6}}{6} q_2\right)} \end{aligned} \quad (5.31)$$

les équations de la dynamique associée sont

$$q'_i = \frac{dq_i}{d\tau} = \sigma_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad p'_i = \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (5.32)$$

On introduit alors les quantités

$$m(q_3) = e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_3} \quad \text{et} \quad E(q_3, p_3) = \frac{p_3^2}{2m} \quad (5.33)$$

et le nouveau temps \tilde{t} (le super-temps selon Bob Jantzen [39]) tel que $d\tilde{t} = m d\tau = m dt/V$. En se rappelant que $q_3 = \frac{4}{\sqrt{6}} \ln V$, on en déduit que $m = V^{4/3}$, et les équations de la dynamique deviennent

$$E = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} - \xi(q_1, q_2) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{dq_{1,2}}{d\tilde{t}} = \frac{p_{1,2}}{m} = \frac{\partial E}{\partial p_{1,2}} \\ \frac{dp_{1,2}}{d\tilde{t}} = \frac{\partial \xi}{\partial q_{1,2}} = -\frac{\partial E}{\partial q_{1,2}} \end{cases} \quad (5.34)$$

complétées par

$$\frac{dm}{d\tilde{t}} = \frac{4}{3} \frac{dV}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dE}{d\tilde{t}} = -\frac{2}{3} \frac{p_1^2 + p_2^2}{m^2} \frac{dV}{dt} \quad (5.35)$$

Il s'agit donc d'un système hamiltonien à deux dimensions concernant une particule de masse $m(\tilde{t})$ repérée par sa position $[q_1(\tilde{t}), q_2(\tilde{t})]^T$, d'énergie totale $E(\tilde{t})$ et dont l'énergie potentielle est $-\xi(q_1, q_2)$.

Les propriétés respectives de V et ξ permettent d'affiner l'étude du comportement du système.

5.3.2 Comportement initial ou tardif

L'analyse de la section 5.2.1, nous a montré que la fonction $V(t)$ n'était pas quelconque. Il existe deux possibilités issues des trois cas évoqués sur la figure 5.2.

1. Univers fermé (1 Big-Bang et un Big-Crunch : figure 5.2 gauche)
 - A l'approche du Big-Bang, et donc à rebours du temps, t décroît, V décroît et donc E est croissante alors que m est décroissante.
 - A l'approche du Big-Crunch t croît, V décroît et donc E est croissante alors que m est décroissante.
2. Univers ouvert (1 Big-Bang uniquement)
 - L'approche du Big-Bang se fait dans les mêmes conditions que précédemment : $E \nearrow$ et $m \searrow$.
 - La limite $t \rightarrow +\infty$ comporte recèle deux sous-cas :
 - (a) Univers plat (figure 5.2 milieu) : Comme $\frac{dV}{dt} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, dans cette même limite nous aurons $E = cste$ et $m = cste$.
 - (b) C'est le cas du Big-Ripp (figure 5.2 droite) : Comme $\frac{dV}{dt} \rightarrow cste > 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, dans cette même limite nous aurons $E \searrow$ et $m \nearrow$.

Dans tous les cas évoqués ci-dessus les fonctions du temps E et m sont monotones. A l'approche de la singularité de type Big Bang, la particule bidimensionnelle modélisant l'Univers voit son énergie croître vers l'infini et sa masse décroître vers 0. Suffisamment proche de la singularité de type Big-Bang on pourra toujours négliger les variations de m par rapport à E .

5.3.3 De l'introduction d'un billard cosmique

Le cadre

Les équations de la dynamique s'écrivent

$$m \frac{d^2 q_{1,2}}{d\tilde{t}^2} + \frac{dm}{d\tilde{t}} \frac{dq_{1,2}}{d\tilde{t}} - \frac{\partial \xi}{\partial q_{1,2}} = 0$$

La nature exponentielle du potentiel ξ permet une étude heuristique introduite historiquement par Misner et reprise jusque dans les transpositions multidimensionnelles récentes du modèle (voir [30]). Considérons le cas de l'approche du Big-Bang : $E \nearrow$ et $m \searrow$, et plaçons nous d'emblée dans la situation où la masse de la particule varie presque plus, précisément

$$|E| \gg |m| \gg \left| \frac{dm}{d\tilde{t}} \right| \quad \text{i.e.} \quad \left| \frac{d \ln m}{d\tilde{t}} \right| = \frac{4}{3} \left| \frac{d \ln V}{d\tilde{t}} \right| \gg 1$$

soit proche de la singularité. Le terme dissipatif central dans les équations de la dynamique peut alors être négligé. Le cas B_1 avec $\xi(q_1, q_2) \equiv 0$ permet d'identifier la solution kasnérienne $q_{1,2}(\tilde{t}) = \lambda_{1,2} \tilde{t} + \mu$ qui dans cette représentation correspond à une évolution de la particule Univers en ligne droite dans le plan (q_1, q_2) . Les autres autres modèles de Bianchi correspondent à des valeurs non toutes nulles des n_i qui confèrent à ξ une dépendance exponentielle en q_1 et q_2 . Pour plus de précisions considérons l'équation différentielle suivante

$$y \leq 0 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -k^2 e^y \quad \text{avec} \quad y(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (5.36)$$

dont la solution s'obtient facilement en suivant la méthode introduite lors de la section 5.2.2. On trouve

$$y(x) = \ln \left[1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{kx}{\sqrt{2}} \right) \right] = -2 \ln \left[\operatorname{ch} \left(\frac{kx}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

la courbe représentative (figure 5.4) de cette solution est fort intéressante pour illustrer notre propos.

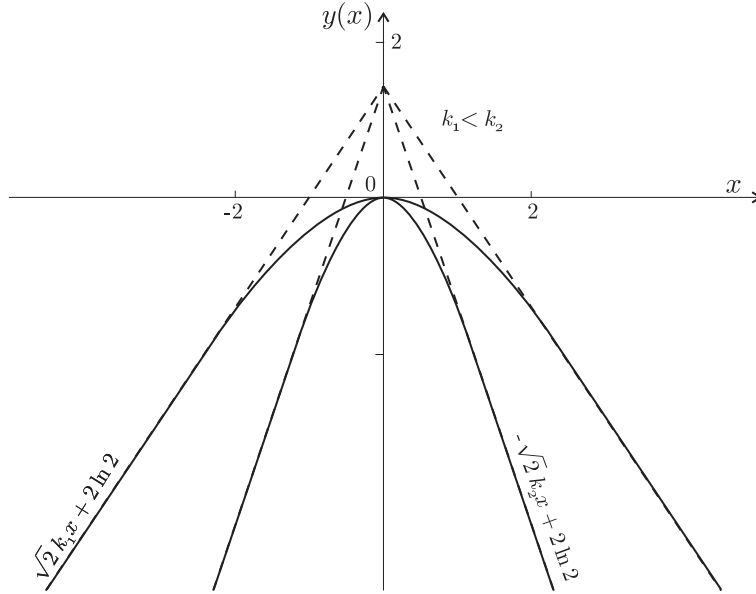


FIG. 5.4 – Représentation graphique de la solution de l'équation (5.36) : Le rebond idéal.

La solution de l'équation (5.36) présente deux régimes asymptotiques affines en $\pm\infty$. Dans le formalisme de la particule bidimensionnelle cette solution s'interprète clairement comme un rebond sur un mur : La bille vient de l'infini négatif, en variable \tilde{t} son mouvement est rectiligne uniforme (elle ne ressent aucun potentiel car $y(x)$ est très négatif et donc $e^{y(x)} \simeq 0$), Si $x < 0$, la fonction $y(x)$ est croissante, en se rapprochant de $y = 0$ le potentiel prend de plus en plus d'ampleur ce qui affecte la vitesse de la bille en intensité et en direction. Tant que la vitesse de la bille ne s'inverse pas cette amplification du potentiel et de la force contraire continue, la condition au bord

$$y(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

impose à la particule de changer de direction en $x = 0$ et $y(x)$ décroît vers les régions à $x > 0$ et $y(x) < 0$ qui vont rapidement redonner une dynamique affine, le potentiel devenant de plus en plus négligeable.

Le "point" de coordonnées (x, y) subit une sorte de rebond sur l'axe qui sépare les régions des y positifs et celle des y négatifs. Une autre caractéristique importante de ce rebond est son amplitude : Nous constatons en effet que les régimes asymptotiques, décrits par les demi-droites

$$y(x) = \pm k\sqrt{2}|x| + 2 \ln 2$$

L'angle θ_k caractéristique de l'ouverture rebond est donc tel que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \theta_k = 0$$

au plus k est grand, au plus le rebond est pincé !

Cette solution idéalisée correspond à la solution générique de l'Univers B_{II} (voir 5.2.3) : Deux régimes kasnériens asymptotiques (dynamique affine) séparés par une transition (rebond). Le potentiel idéal de l'exemple proposé dans la relation (5.36) est en effet celui de l'Univers B_{II} pour lequel le triplet (n_1, n_2, n_3) ne contient qu'une seule composante non nulle⁸, en choisissant $n_3 = 1$, il vient $\xi(q_1, q_2) = -e^{-\frac{2\sqrt{6}}{3}q_2}$ et le tour est joué ...

Dans le cas général, le potentiel ξ est plus compliqué mais demeure asymptotiquement exponentiellement négatif et la dynamique reste donc qualitativement identique : Pourvu que l'on soit suffisamment proche de la singularité

⁸Comme nous l'avons vu dans la section 4.1, il existe une classe d'équivalence pour le choix de (n_1, n_2, n_3) . Ces classes correspondent aux divers choix possibles permettant de faire varier les caractéristiques du noyau d'une matrice 3×3 diagonale (voir (4.9)). Pour obtenir un Univers B_{II} avec $(n_1, n_2, n_3) = (0, 0, 1)$ il aurait suffi de choisir $A_b = [0, 0, a]$, l'identité de Jacobi (4.6) aurait alors impliqué $an_3 = 0$, mais tout le reste de l'affaire aurait été inchangé ..

pour négliger la variation de m , la dynamique est une suite de régimes kasnériens séparés par des rebonds dont le type générique est décrit par la dynamique B_{II} , mais qui, comme nous allons le voir, peuvent être exceptionnellement plus fantasques ...

Dans la véritable dynamique asymptotique, les rebonds en questions ne se font plus avec la ligne séparant les valeurs positives et négatives de la fonction y du problème idéalisé, mais avec la courbe des "vitesses" nulles

$$\frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} = E + \xi(q_1, q_2) = 0 \quad (5.37)$$

L'énergie E étant une fonction positive et croissante lors de l'approche du Big-Bang, les courbes (5.37) sont donc des isovalues croissantes de la fonction $-\xi(q_1, q_2)$. Nous avons représenté sur la Figure 5.5, ces diverses courbes isovalues pour toutes les triplets (n_1, n_2, n_3) correspondants aux classes d'équivalences d'Univers de Bianchi.

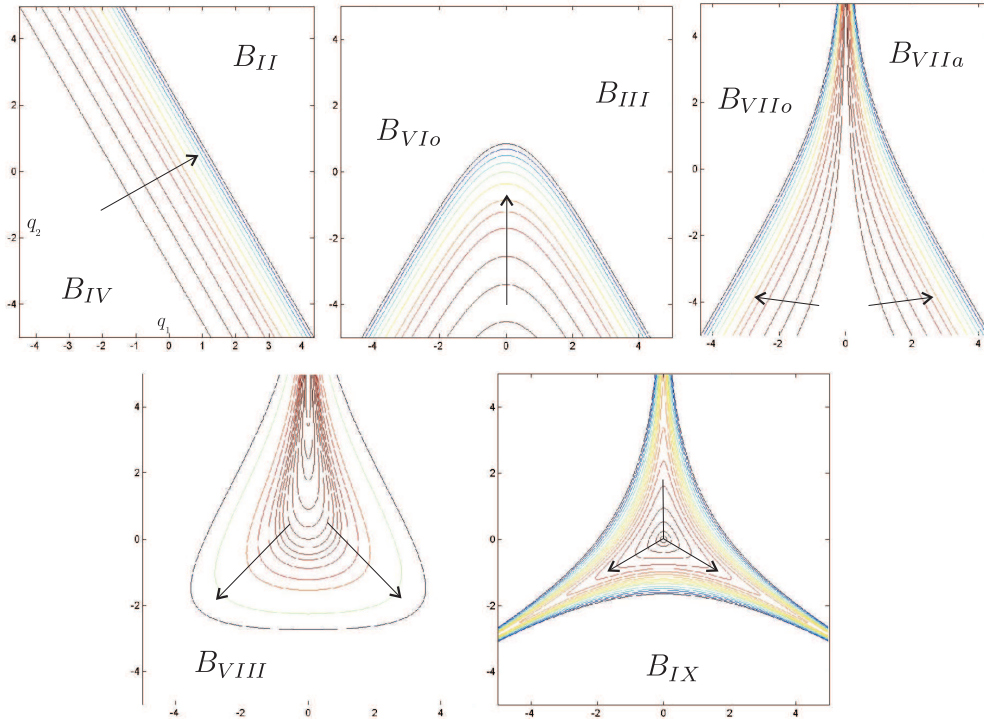


FIG. 5.5 – Représentation graphique dans le plan (q_1, q_2) des courbes isovalues des différentes fonctions $\xi(q_1, q_2)$ associées aux différents modèles d'Univers de Bianchi. Les flèches indiquent le sens des pentes décroissant vers $-\infty$.

Dès que l'on peut négliger la friction introduite par la perte de masse, la dynamique est donc très bien représentée par le mouvement d'une bille dans un billard dont les bandes s'éloignent lorsque l'on se rapproche de la singularité. Pour peu que l'on soit suffisamment proche de la singularité, la vitesse de la bille

$$v_u^2 = \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2$$

est toujours plus grande que la vitesse de la bande que l'on peut identifier au module de la variation d'énergie

$$v_b^2 = \frac{2}{3} \frac{p_1^2 + p_2^2}{m^2} \frac{dV}{dt} = \frac{2}{3} v_u^2 \frac{dV}{dt}$$

La forme des billards est particulièrement intéressante :

- Deux familles de modèles sont à considérer : Le modèle B_{IX} possède une bande fermée alors que tous les autres ont des bandes ouvertes. Contrairement à ce que l'on peut lire dans certains articles le modèle B_{VIII} possède bien une bande ouverte vers la région $q_1 \simeq 0$ et $q_2 \rightarrow +\infty$.
- Quatre types de rebonds sont à considérer :
 1. Le rebond sur bande rectiligne qui concerne certains passages de la dynamique B_{II} ou B_{IV} de façon générique ou bien par exemple⁹ la dynamique B_{VIII} ou B_{IX} lorsque $q_2 \rightarrow -\infty$ et $q_1 \rightarrow 0$.

⁹Il en existe beaucoup d'autres que nous laissons à la perspicacité du lecteur

2. Le rebond dans un coin mou comme par exemple le cas de la dynamique B_{VI_0} lorsque $q_1 \rightarrow +\infty$ et $q_2 \rightarrow 0$. On peut retrouver de tels passages en dynamique B_{III} et B_{VIII}
3. Le rebond dans un coin dur , c'est l'apanage unique de la dynamique B_{IX} lorsque par exemple $q_2 \rightarrow +\infty$ et $q_1 \simeq 0$.
4. Le rebond dans un canal comme par exemple le cas de la dynamique $B_{VII_0,a}$ ou B_{VIII} lorsque $q_2 \rightarrow +\infty$ et $q_1 \simeq 0$.

La différence entre le canal et le coin dur réside simplement dans le fait que le coin dur est fermé en haut ce qui n'est pas le cas du canal qui ne se referme qu'asymptotiquement. Les bandes compliquées du billard B_{VIII} se décomposent en la somme de morceaux de bandes élémentaires associées aux modèles B_{II} , B_{VI_0} et B_{IX_0} . Loin de la singularité, les bandes du billard B_{IX} sont constituées de coins mous à la B_{VI_0} reliés par des lignes droites à la B_{II} , à l'approche de la singularité les coins mous deviennent durs.

L'étude de l'interaction avec les bandes est très ancienne puisque les premiers résultats sur ce sujet sont mentionnés dès la fin des années soixante dans l'un des deux articles fondateur de Misner [40], ils furent complétés par une série d'article de Ryan (voir par exemple [41]) et détaillés par Jantzen [39]. Nous reprenons ici l'idée de ces travaux dans le contexte de la bande rectiligne et nous proposons un scénario original pour le comportement dans les coins.

Les rebonds

La situation de la bille "loin" de la bande (au milieu du billard) est commune à tous les cas : On alors $\xi \simeq 0$ et par conséquent $p_3^2 = p_1^2 + p_2^2$, en utilisant le super temps et la définition des p_i il vient donc

$$\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2$$

Si $\frac{dq_3}{dt} \neq 0$, il vient donc

$$\left(\frac{dq_1}{dq_3}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dq_3}\right)^2 = 1$$

L'idée de Misner et Ryan ([40],[41]), est de faire intervenir dans cette dernière relation les sinus et cosinus de l'angle incident θ_i et réfléchit θ_r de la bille avec la bande avant et après le rebond.

Rebonds sur une bande rectiligne

Le rebond sur une bande rectiligne s'effectue de façon générique dans l'univers B_{II} , on le retrouve aussi de façon occasionnelle dans d'autres Univers, B_{VIII} ou B_{IX} lorsque $q_2 \rightarrow -\infty$, par exemple. Conformément à la Figure 5.6, on peut définir les angles θ_i et θ_r tels que

$$\begin{aligned} \sin \theta_i &= \left(\frac{dq_1}{dq_3}\right)_i & \sin \theta_r &= \left(\frac{dq_1}{dq_3}\right)_r \\ \cos \theta_i &= -\left(\frac{dq_2}{dq_3}\right)_i & \cos \theta_r &= \left(\frac{dq_2}{dq_3}\right)_r \end{aligned} \tag{5.38}$$

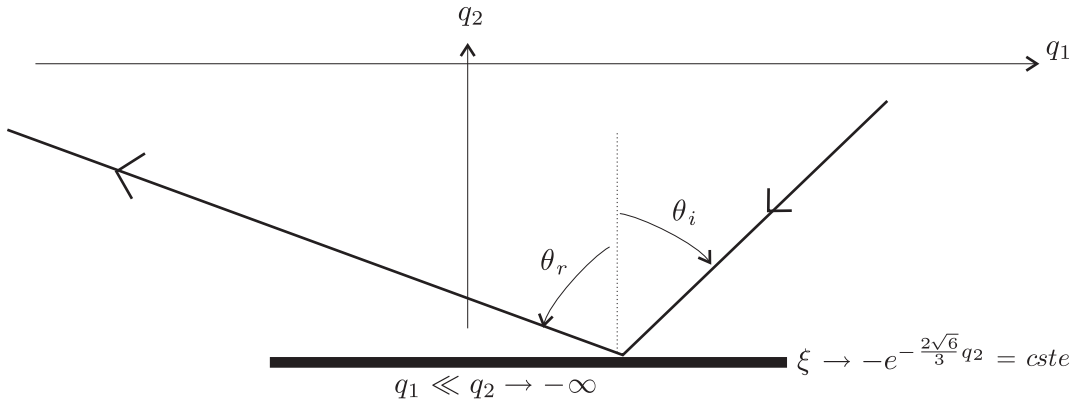


FIG. 5.6 – Rebond sur une bande droite

Toutes les situations d'interactions avec une bande droite (B_{II} , ou B_{VIII} , B_{IX} quand $q_2 \rightarrow -\infty$, ...) correspondent à une situation dans laquelle

$$\xi(q_1, q_2) \rightarrow -e^{-\frac{2\sqrt{6}}{3}q_2}$$

la tendance est parfaite en B_{II} , asymptotique dans tous les autres cas ...

Le hamiltonien de l'interaction avec la bande droite est donc

$$H = \sum_{i=1}^3 \sigma_i p_i^2 - e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_3 - \frac{2\sqrt{6}}{3}q_2}$$

les équations de la dynamique fournissent alors

$$\frac{dp_1}{d\tau} = 0 \quad \frac{dp_2}{d\tau} = -\frac{2\sqrt{6}}{3} e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_3 - \frac{2\sqrt{6}}{3}q_2} \quad \text{et} \quad \frac{dp_3}{d\tau} = \frac{\sqrt{6}}{3} e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_3 - \sqrt{2}q_1}$$

desquelles on déduit que les quantités p_1 et $p_2 + 2p_3$ se conservent lors du rebond.

La conservation de $p_1 = \frac{dq_1}{d\tau}$ assure que

$$\left(\frac{dq_1}{d\tau}\right)_i = \left(\frac{dq_1}{d\tau}\right)_r \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dq_3}{d\tau}\right)_i \sin \theta_i = \left(\frac{dq_3}{d\tau}\right)_r \sin \theta_r \quad (5.39)$$

La conservation de $p_2 + 2p_3 = \frac{dq_2}{d\tau} + 2\frac{dq_3}{d\tau}$ assure quant à elle

$$\left(\frac{dq_3}{d\tau}\right)_i [2 - \cos \theta_i] = \left(\frac{dq_3}{d\tau}\right)_r [2 + \cos \theta_r] \quad (5.40)$$

un mélange de ces deux lois de conservation permet donc d'obtenir

$$\frac{\sin \theta_i}{2 - \cos \theta_i} = \frac{\sin \theta_r}{2 + \cos \theta_r}$$

de sordides calculs permettent alors de récrire cette loi de transition sous la forme (e.g. [41])

$$\sin \theta_r = \frac{3 \sin \theta_i}{5 - 4 \cos \theta_i} \quad (5.41)$$

il est même possible de relier cet angle au paramètre u de la solution de Kasner. La transition de l'Univers B_{II} étant équivalente au rebond sur la bande droite avec (e.g. [36] p.237).

$$u = \frac{2 - \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta}{2 \cos \theta - 1}$$

Rebonds dans les coins ou les canaux

Levons tout d'abord une partie du voile : De nos trois types de coins, deux seulement s'avèrent dynamiquement différents : En effet, ces formes de bandes sont atteintes lorsque $q_2 \rightarrow +\infty$, situation dans laquelle nous avons

$$\xi(q_1, q_2) \rightarrow \mp 2e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_2} \left[1 \pm \text{ch}(\sqrt{2}q_1)\right] \quad (5.42)$$

Le signe du haut correspond au potentiel de l'Univers B_{VI_o} et celui du bas au cas de l'Univers B_{VII_o} , ce comportement est asymptotique ($q_2 \rightarrow +\infty$) dans les Univers B_{IX} et B_{VIII} , la différence de fermeture entre le canal et le coin dur n'est due qu'aux termes asymptotiquement négligés.

Pour éviter toute tentative apparemment vaine¹⁰, signalons tout d'abord que la technique de recherche de quantités conservées lors du rebond (e.g. Misner et Ryan pour la bande droite) semble inadéquate à cause de la présence du terme en $\text{ch}(\sqrt{2}q_1)$ dans le potentiel qui est maintenant une fonction de deux variables ... Nous préférons donc une étude plus analytique mais très concluante.

Avec le potentiel (5.42) et en posant $(x, y) = \left(\sqrt{2}q_1, \frac{\sqrt{6}}{3}q_2\right)$ la dynamique s'écrit

$$\begin{cases} x'' = -4e^y \text{sh} x \\ y'' = \mp \frac{4}{3} e^y (1 \pm \text{ch} x) \end{cases}$$

Il n'est pas question ici de résoudre un tel système, cette tâche semble perdue d'avance ... Il semble toutefois possible de décrire le comportement de la bille dès lors qu'elle s'engouffre dans un coin !

¹⁰Je parle pour moi en tous cas ...

Imaginons que $y \propto q_2$ soit initialement, une fonction croissante : Suivant la variation de $x \propto q_1$, la bille se dirige soit vers la bande de droite(positive) soit vers la bande de gauche (négative)¹¹. Prenons la première hypothèse, tôt ou tard, la bille va se retrouver dans une région $x > 0$ pour laquelle on pourra négliger la partie décroissante du sinus hyperbolique et se retrouver avec une équation ressemblant à s'y méprendre à notre cas analytique idéalisé (5.36) avec cependant un paramètre $k = 2e^{y/2}$ variable !

Une fois le rebond sur la bande positive effectué, x décroît, la bille se dirige donc vers la bande négative. Une alternative se produit toutefois dans le rebond quant au comportement de y : Nous avons vu que l'amplitude de k se retrouvait dans la pente des régimes asymptotiques d'avant et d'après le rebond. Au plus k est grand au plus le rebond est "pincé", attendu que ce dernier est symétrique par rapport à la normale au point de contact, un rebond trop pincé sur ces bandes hyperboliques conduira inéluctablement à une décroissance de y . Réciproquement, un rebond largement ouvert pourra préserver le sens de variation de y . L'interaction avec la bande négative est complètement symétrique, il suffit pour s'en convaincre de procéder au changement de variable $\tilde{x} = -x$. Lorsqu'une bille entre dans un coin elle effectue de façon générique tout d'abord des rebonds entre les 2 bandes concernées, ces derniers sont de plus en plus pincés au fil de l'entrée dans le coin ($y \nearrow$), les bandes n'étant pas strictement verticales un trop fort pincement conduit à l'inversion du processus et la bille ressort du coin en continuant à rebondir de façon réciproque. Ce processus est illustré par le schéma de la Figure 5.7.

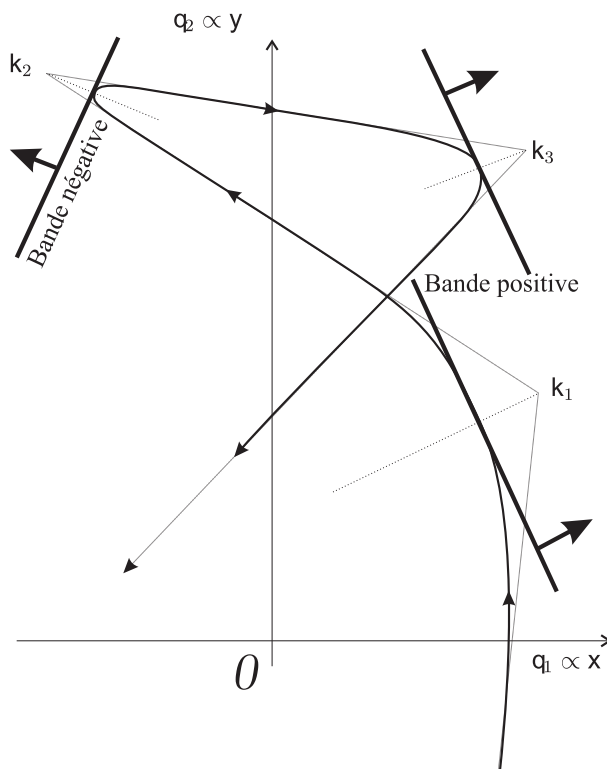


FIG. 5.7 – Rebond dans les coins . Les bandes s'éloignent. Les facteurs $k = 2e^y$ de chaque collision sont différents : $k_2 > k_3 > k_1$

Quelques remarques s'imposent pour conclure notre épopée billardistique.

- Même si le billard B_{VIII} ne possède pas une structure de bande fermées, et grâce au mécanisme de sortie du canal décrit ci-dessus, il semble impossible¹² pour la bille de pouvoir profiter de l'ouverture située en $q_2 \rightarrow +\infty$.
- Le comportement de la bille dans chacun des 2 coins durs du bas du billard B_{IX} se traite par application d'une rotation de $\pm\pi/3$ qui laisse invariant le potentiel B_{IX} et donc la dynamique ...
- Notre approche heuristique basée sur l'analyse de l'équation différentielle (5.36) reste à confirmer par quelques solutions numériques bien choisies. Elles font l'objet de la section 6.2.1.

5.3.4 Analyse fine du billard B_{IX}

Nous avons mentionné plus haut que les coins des bandes du billard B_{IX} changeait à l'approche de la singularité : loin de la singularité (faibles valeurs de E) il s'agirait de 3 coins mous, proche de la singularité, il s'agirait de 3 coins durs.

¹¹La courbe des isovaleurs de $\xi(q_1 \propto x, q_2 \propto y)$ est invariante par symétrie selon l'axe des x car le potentiel (5.42) est pair en q_1

¹²sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle de conditions initiales ...

La comparaison avec un billard n'est pas simplement ludique, elle permet aussi de déterminer les propriétés dynamiques du système. La dynamique sur un billard est effet connue au moins dans deux cas particuliers (cf. [42],[44],[43],[45])

- Le plan de phase d'un système évoluant sur un billard dont les bandes sont des courbes fermées à courbure strictement négative (bande concave : géométrie elliptique), contient principalement des orbites quasi-périodiques ;
- Les orbites d'un système évoluant sur un billard dont les bandes sont des courbes fermées à courbure strictement positive (bande convexe : géométrie hyperbolique), ne sont pas périodiques.

Ce résultat mathématique est très intuitif : si, lors du rebond, la courbure de la bande est négative (bande concave) ce dernier aura tendance à confiner la trajectoire, à l'inverse un rebond sur une bande convexe aura plutôt tendance à introduire de la diffusion dans les trajectoires. Le cas intermédiaire de bandes fermées à courbure de signe indéfini n'est pas associé à un théorème mathématique mais il est tout de même permis de penser que si la particule est amenée à interagir avec toute la longueur des bandes du billard, les zones hyperboliques introduiront inévitablement une diffusion néfaste à la quasi-périodicité des orbites.

S'il existe bien une transition coins mous/ coins durs lors de l'approche de la singularité B_{IX} , la structure des bandes passera dans le même temps d'une situation elliptique à une situation hyperbolique. Il est donc important d'étudier une telle transition, nous procéderons pour cela à l'étude de la courbure des courbes isovaleurs du potentiel B_{IX}

En conservant les variables

$$x = \sqrt{2}q_1 \quad \text{et} \quad y = \frac{\sqrt{6}}{3}q_2$$

et en introduisant un facteur de normalisation négatif¹³ en vue de simplifier quelques calculs, il vient

$$-\frac{\xi(q_1, q_2)}{3} := V(x, y) = \frac{e^{-4y} + 2e^{2y} [\text{ch}(2x) - 1] - 4e^{-y} \text{ch}(x)}{3}$$

ce potentiel est manifestement pair en x , de plus il possède un minimum global situé à l'origine, le facteur $1/3$ est d'ailleurs destiné à la normalisation de ce minimum à la valeur -1 , nous avons donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad V(x, y) \in]-1, +\infty[\quad > \quad V(0, 0) = -1$$

Détection de la transition coin dur/coin mou

L'étude des courbes définies par une relation du type $f(x, y) = 0$ n'est pas chose aisée mais leur courbure $R(x, y)$ est en principe calculable. Le calcul basé sur le théorème des fonctions implicites fournit cependant un résultat difficilement exploitable dans le cas qui nous intéresse.

Il est tout à fait préférable de lui substituer une analyse plus fine : La nature des courbes de niveau indiquée par la Figure 5.5 suggère l'étude des intersections entre les courbes $V(x, y) = u$ et les droites $y = \lambda$ d'ordonnée constante. Nous sommes donc conduits à l'étude des solutions de l'équation $V(x, \lambda) = u$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $u \in [-1, +\infty[$, posant $k = e^\lambda$ et $a = \text{ch}(x)$, en notant que $\text{ch}(2x) = 2a^2 - 1$, l'équation à résoudre s'écrit

$$\left. \begin{array}{l} a \geq 1 \\ k > 0 \\ u > -1 \end{array} \right\} \quad \text{tels que} \quad 4k^2 a^2 - \frac{4}{k} a - \frac{1}{k^4} - 4k^2 - 3u = 0$$

la résolution de cette équation est très simple, en choisissant la variable a deux solutions apparaissent

$$a_{\pm}(k, u) = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k^2} \pm \sqrt{4k^2 + 3u} \right)$$

pour que $\sqrt{4k^2 + 3u}$ soit réel, dans chaque cas a_+ et a_- deux régimes doivent être envisagés :

- Si $u \in [-1, 0[$ alors $k \in [k_o, +\infty[$ avec $k_o = \sqrt{-3u/4}$
- Si $u \in [0, +\infty[$ alors $k \in [0, +\infty[$

Avant de nous lancer dans l'étude signalons que chaque valeur de $a \geq 1$ correspond à deux valeurs de x compte tenu de la parité du cosinus hyperbolique.

Étude de a_+ Nous cherchons à déterminer l'existence de nombres k et u vérifiant la contrainte $\sqrt{4k^2 + 3u} \in \mathbb{R}$ et tels que

$$a_+(k, u) = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k^2} + \sqrt{4k^2 + 3u} \right) \geq 1$$

1. $u \in [0, +\infty[\Rightarrow k \in [0, +\infty[$

Sur ces intervalles nous avons

$$\lim_{k \rightarrow 0} a_+ = +\infty \quad , \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_+ = 1^+$$

¹³C'est en effet les courbes $-\xi = cste$ qui interviennent dans le problème ...

ainsi que

$$\frac{\partial a_+(k, u)}{\partial k} < 0$$

Il existe donc une paire (k, u) associée à deux valeurs opposées de x correspondant à deux intersections entre la courbe de niveau $V(x, y) = u$ et la droite $y = \ln k$

2. $u \in [-1, 0[\Rightarrow k \in [k_o, +\infty[$

Sur ces intervalles nous avons

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_+ = 1^-$$

ainsi que

$$\frac{\partial a_+(k, u)}{\partial k} = 0 \iff k = k_{\pm} = \frac{\sqrt{2}}{|u|} \sqrt{1 \pm \sqrt{1 + \frac{3u^3}{4}}}$$

il faut noter que $k_- > k_o$ et $a_+(k_-, u) \geq 1$, la valeur 1 étant atteinte pour le cas limite $u = -1$, de plus $a_+(k_+, u) < 1$. Il existe donc une paire (k, u) associée à deux valeurs opposées de x correspondant à deux intersections entre la courbe de niveau $V(x, y) = u$ et la droite $y = \ln k$. Si $u = -1$, la courbe de niveau est un point, l'intersection a lieu avec la droite $y = 0$ en $x = 0$.

Étude de a_- Nous cherchons à déterminer l'existence de nombres k et u vérifiant la contrainte $\sqrt{4k^2 + 3u} \in \mathbb{R}$ et tels que

$$a_-(k, u) = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{k^2} - \sqrt{4k^2 + 3u} \right) \geq 1$$

1. $u \in [0, +\infty[\Rightarrow k \in [0, +\infty[$

Sur ces intervalles nous avons

$$\lim_{k \rightarrow 0} a_- = +\infty \quad , \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_- = -1$$

ainsi que

$$\frac{\partial a_-(k, u)}{\partial k} = 0 \iff k = k_+ = \frac{\sqrt{2}}{u} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{3u^3}{4}}}$$

il n'est pas simple de vérifier que $a_-(k_+, u) < 0$, et qu'ainsi il existe une paire (k, u) associée à deux valeurs opposées de y correspondant à deux intersections entre la courbe de niveau $V(x, y) = u$ et la droite $y = \ln k$. Pour u fixé, la valeur de k est dans l'intervalle $[0, k_m]$ avec $k_m < k_+$.

2. $u \in [-1, 0[\Rightarrow k \in [k_o, +\infty[$

Sur ces intervalles nous avons

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_- = -1$$

ainsi que

$$\frac{\partial a_-(k, u)}{\partial k} < 0$$

la fonction $a_-(k, u)$ est donc strictement décroissante en k , sa position par rapport à 1 est déterminée par la valeur de

$$a_-(k_o, u) = \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{3u} \right)^{\frac{3}{2}}$$

- (a) Si $a_-(k_o, u) \geq 1$ c'est-à-dire $u \in \left[-\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}, 0 \right[$

Il existe une paire (k, u) associée à deux valeurs opposées de x correspondant à deux intersections entre la courbe de niveau $V(x, y) = u$ et la droite $y = \ln k$.

- (b) Si $a_-(k_o, u) < 1$ c'est-à-dire $u \in \left[-1, -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3} \right[$

Il n'existe pas de paire (k, u) associée à deux valeurs opposées de x permettant d'obtenir une intersection entre la courbe de niveau $V(x, y) = u$ et la droite $y = \ln k$.

En résumé de toute cette analyse, et en introduisant le paramètre $u_o = -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3} \approx -0.84$, nous pouvons conclure que :

- Si $u \in [-1, u_o[$, il existe au maximum 2 intersections entre les lignes de niveau $V(x, y) = u$ et une droite $y = cste$. Ces lignes ont une courbure définie négative

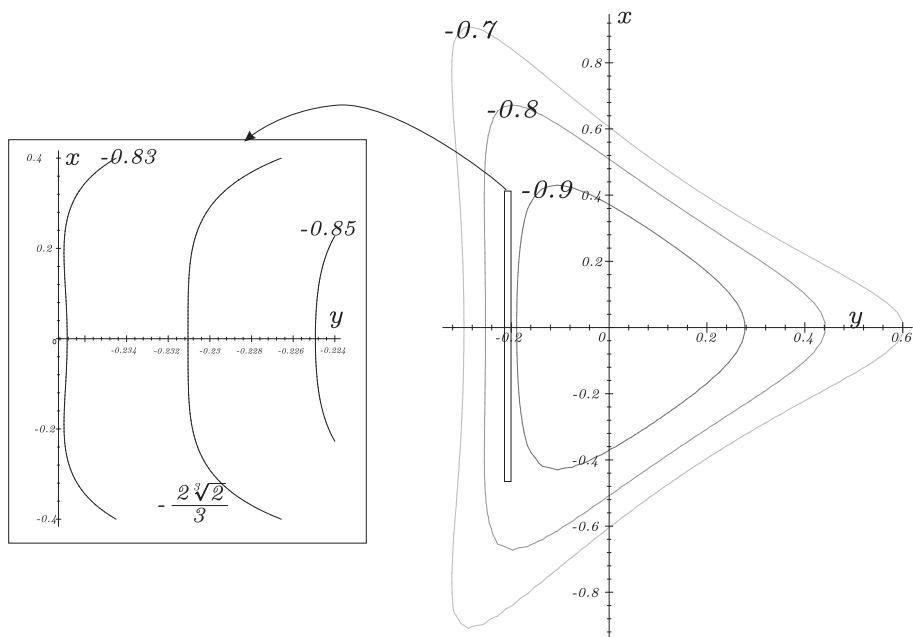


FIG. 5.8 – Inversion du signe de la courbure de la bande dans le billard associé à la dynamique B_{IX} vide. Le carré de gauche est un "zoom" en y de la région où l'inversion se produit

- Si $u \in [u_o, +\infty[$, il peut exister jusqu'à 4 intersections entre les lignes de niveau $V(x, y) = u$ et une droite $y = cste$. Ces lignes ont une courbure qui change de signe.

Ce comportement est illustré sur la Figure 5.8. La transition existe donc et est unique : Tant que nous sommes loin de la singularité la bille interagit avec des bandes dont la structure est complètement elliptique. Pour une valeur critique du temps reliée à la valeur de l'énergie $E = -2 \sqrt[3]{2} \simeq -2.52$ certaines parties de la bande ont une structure hyperbolique. Cette transition ne se produit qu'une seule fois lorsque ($E \rightarrow +\infty$) et que l'on se rapproche de la singularité. Nous tâcherons d'illustrer cette transition lors de nos études numériques.

Chapitre 6

Résultats numériques

6.1 Modélisation numérique de la dynamique B_{ix} dans le formalisme BKL

Nous proposons dans cette section d'illustrer le travail analytique de Ringström [31] par une série d'expériences numériques. Effectuées dans le cadre de la dynamique B_{ix} vide, ces simulations auront deux objectifs : Le premier sera de retrouver par des méthodes de type Monte-Carlo la convergence de la dynamique vers une fermeture des trajectoires de type B_{II} , c'est-à-dire une série de transition infinie entre ères de Kasner de la forme (5.28), ce travail s'effectue dans la continuité des travaux de S. Rugh ([17], [20] et [21]). Le deuxième objectif de cette étude numérique sera de reprendre une partie des travaux initiés par Cornish et Lewin [24] qui visent à quantifier la sensibilité de la dynamique aux conditions initiales. L'imprécision de certaines techniques et l'incomplétude de certains résultats présentés dans cet article (voir [28]) laissent la place à de nombreux développements.

6.1.1 Test de la conjecture BKL

Le système différentiel associé à la dynamique B_{ix} vide est le suivant

$$\begin{cases} 0 &= E_c + E_p = H \\ A_1'' &= (e^{A_2} - e^{A_3})^2 - e^{2A_1} \\ A_2'' &= (e^{A_3} - e^{A_1})^2 - e^{2A_2} \\ A_3'' &= (e^{A_1} - e^{A_2})^2 - e^{2A_3} \end{cases} \quad (6.1)$$

les fonctions $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ et $A_3(\tau)$ sont à valeurs dans \mathbb{R} et vérifient à chaque temps conforme τ la contrainte

$$0 = H = \underbrace{A_1' A_2' + A_1' A_3' + A_3' A_2'}_{E_c} + \underbrace{2(e^{A_1+A_2} + e^{A_1+A_3} + e^{A_2+A_3}) - (e^{2A_1} + e^{2A_2} + e^{2A_3})}_{E_p} \quad (6.2)$$

Dans ce contexte, l'évolution vers la singularité s'effectue en prenant la limite $\tau \rightarrow \pm\infty$. L'infini positif revient à étudier un Big-Crunch (l'Univers B_{ix} est fermé), l'infini négatif correspond à l'étude d'un Big-Bang, ces deux singularités sont identiques. D'un point de vue numérique, il s'agit de résoudre le système (6.1) en imposant à $\tau = 0$ ($t = 1$), la contrainte $H = 0^1$. Le schéma numérique que nous avons mis en place est basé sur l'algorithme Runge-Kutta d'ordre 4 avec adaptation du pas de temps sur la vitesse de variation des solutions. Nous avons envisagé trois familles de conditions initiales : Aléatoires, quasi-kasnériennes et anti-kasnériennes.

Cas général : Conditions initiales aléatoires

Pour chaque expérience, nous avons généré 5 nombres aléatoires dans l'intervalle $[-1, 1]$ pour A_{1o} , A_{2o} , A_{3o} , A'_{1o} et A'_{2o} à $\tau = 0$ et calculé la valeur de A'_{3o} permettant de satisfaire la contrainte $E_c = -E_p$. La résolution de l'équation algébrique associée est effectuée par une méthode itérative, en Fortran double précision, à $\tau = 0$ nous avons $|H| \leq 2 \cdot 10^{-14}$.

La figure 6.1 montre l'évolution dynamique calculée pour $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ et $A_3(\tau)$ pour le graphique du haut, $A'_1(\tau)$, $A'_2(\tau)$ et $A'_3(\tau)$ pour le graphique du milieu et de la quantité

$$u(\tau) = \frac{\min(A'_1, A'_2, A'_3)}{A'_1 + A'_2 + A'_3 - [\min(A'_1, A'_2, A'_3) + \max(A'_1, A'_2, A'_3)]} \quad (6.3)$$

¹ H est une intégrale première, sa valeur est donc conservée au cours de l'évolution.

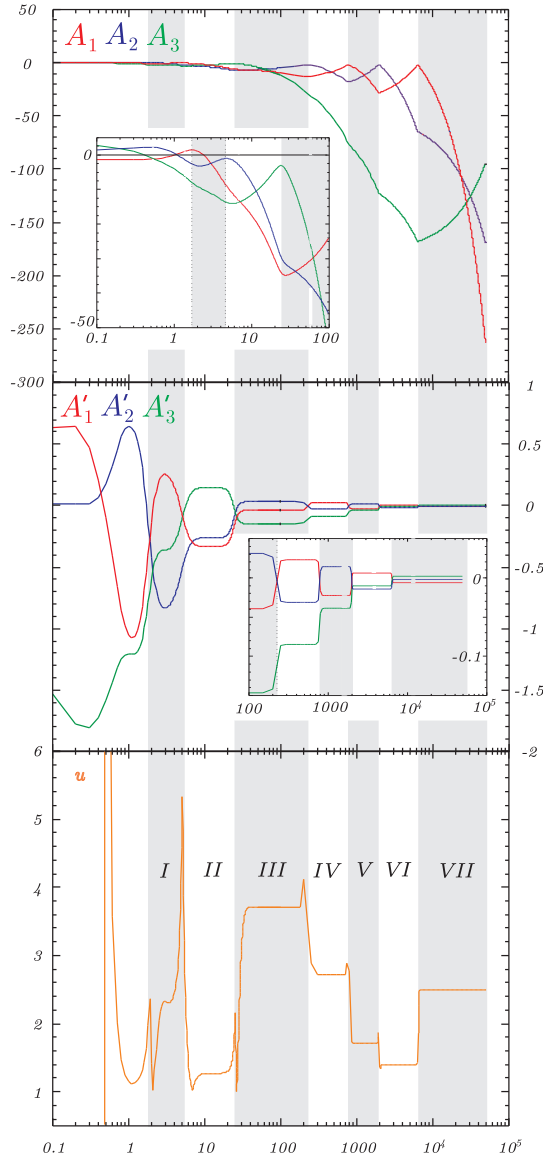


FIG. 6.1 – Représentation graphique des solutions numériques obtenues pour une dynamique B_{IX} vide avec des conditions initiales aléatoires vérifiant la propriété $H = 0$.

pour le graphique du bas. Cette quantité introduite par S. Rugh [17], est égale à l'indice de Kasner lorsque celui-ci existe. Diverses ères peuvent aisément être identifiées sur ces graphiques et ont été repérées par des lettres romaines. Les caractéristiques de ces diverses ères sont rassemblées dans le tableau ci-dessous

Ère	Ordre des axes	Valeur de u
I	● ● ●	2.31
II	● ● ●	1.272
III	● ● ●	3.71450
IV	● ● ●	2.71462
V	● ● ●	1.71482
VI	● ● ●	1.39996
VII	● ● ●	2.49721

Nous avons codé dans ce tableau $A_1 = \bullet$, $A_2 = \bullet$ et $A_3 = \bullet$. La valeur de u présentée est la valeur de stabilisation de la quantité (6.3) pendant au minimum 10 itérations successives.

Après une phase transitoire qui s'étend environ jusqu'à $\tau \approx 30$, les conditions initiales arbitraires se retrouvent proches un état kasnérien (Ère I), les oscillations kasnériennes de la conjecture BKL se produisent alors suivant le carte (5.28) avec une précision remarquable (1 pour mille). Cette précision croît avec τ .

Conditions initiales quasi-kasneriennes : $E_c = E_p = 0$.

Choisir $H = 0$ en imposant $E_c = E_p = 0$ revient à se placer, aux erreurs numériques près², dans une ère de Kasner. Un paramétrage des conditions initiales possible est le suivant (e.g. [26]) :

$$\begin{aligned} A'_1(0) &= \frac{-3\omega_o(1+x_o)}{(1+x_o+x_o^2)} \\ A'_2(0) &= \frac{3\omega_o x_o}{(1+x_o+x_o^2)} \\ A'_3(0) &= \frac{-3\omega_o x_o(1+x_o)}{(1+x_o+x_o^2)} \end{aligned} \quad (6.4)$$

et

$$\begin{aligned} A_1(0) &= \frac{3\Omega_o}{(1+y_o+x_o y_o)} \\ A_2(0) &= 0 \\ A_3(0) &= \frac{3\Omega_o(y_o+x_o y_o)}{(1+y_o+x_o y_o)} \end{aligned} \quad (6.5)$$

avec $(x_o, y_o) \in [1, 2]^2$, $\omega_o \in \mathbb{R}^+$ de façon à avoir deux axes en contraction et un axe en expansion pour $\tau \rightarrow \pm\infty$, et Ω_o solution *négative* de l'équation

$$1 - 2\chi + \chi^{\frac{1}{1+z}} (\chi^{\frac{1}{1+z}} - 2) + \chi^{\frac{z}{1+z}} (\chi^{\frac{z}{1+z}} - 2) = 0 \quad (6.6)$$

avec $\chi = e^{6\Omega_o} \in [0, 1]$ et $z = y_o + x_o y_o$. Dans ce paramétrage il est facile d'interpréter x_o comme la valeur de u^* correspondant à l'ère de Kasner proche de laquelle nous voulons partir, y_o comme le paramètre nécessaire au positionnement respectif des axes, Ω_o et ω_o caractérisent le volume de l'Univers à $\tau = 0$. Le choix $\omega_o > 0$ assure un taux de variation initial du logarithme du volume

$$\left. \frac{d \ln V}{dt} \right|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 A'_i(0) = -\frac{3\omega_o}{2}$$

négatif pour nos simulations : V décroît vers 0 à l'approche de la singularité. Le choix $\Omega_o < 0$, correspond à un Univers de petit volume, car

$$\ln V|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 A_i(0) = \frac{3\Omega_o}{2}$$

un tel choix n'est pas fondamental mais correspond aux observations qui montre un Univers isotrope dès qu'il est gros (après la recombinaison).

Enfin, le choix $A_2(0) = 0$ fixe le cinquième degré de liberté (qui n'enlève rien à la généralité de la simulation), mais impose alors que $A'_2(0)$ soit positif.

La Figure 6.2 montre l'évolution des fonctions $A'_1(\tau)$, $A'_2(\tau)$ et $A'_3(\tau)$ à l'approche de la singularité de type Big-Crunch ($\tau \rightarrow +\infty$), pour un choix de conditions initiales quasi-kasneriennes issues du paramétrage suivant :

$$\begin{aligned} x_o &= 1.123456789000 & \omega_o &= 1 \\ y_o &= 1.987654321000 & \Omega_o &= -0.542912942 \end{aligned} \quad (6.7)$$

A $\tau = 0$, la contrainte $H = 0$ est vérifiée à $1.42 \cdot 10^{-14}$ près.

Comme on peut le voir sur la figure 6.2 la durée des ères de Kasner successive est de plus en plus longue. La représentation d'une ère par une valeur de u constante (au moyen de la relation (6.3)) est de plus en plus bonne lorsque τ grandit et que l'on se rapproche de la singularité. La succession des changements d'axe (ordre des couleurs) est conforme à la carte (5.28) sur toute la simulation. La valeur de u n'est en accord remarquable avec la carte théorique que pour $\tau \gtrsim 100$. La valeur de u correspondante n'a alors plus grand lien avec la valeur de x_o qui devait initialiser cette carte : le passage de 1.123456789 à 1.189221501 est le fruit d'une période transitoire complexe.

Cette phase transitoire n'est en fait due qu'au choix du paramètre ω_o : Dans le paramétrage (6.4), la grandeur ω_o représente en effet le module de la vitesse de variation du logarithme du volume, pour Ω_o fixé, ω_o permet de se placer

²d'où le nom de quasi...

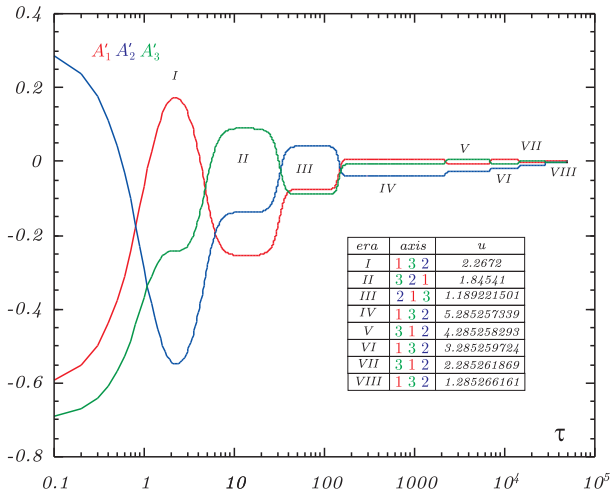


FIG. 6.2 – Représentation graphique des solutions numériques obtenues pour une dynamique B_{IX} vide avec des conditions initiales quasi kasnériennes issues des relations (6.4) et (6.5) avec $x_o \simeq 1.12$, $y_o \simeq 1.98$, $\omega_o = 1$ et $\Omega_o \simeq -0.54$. Le tableau indique la valeur de u et la disposition des trois facteurs d'échelles dans chacune des ères de Kasner atteintes.

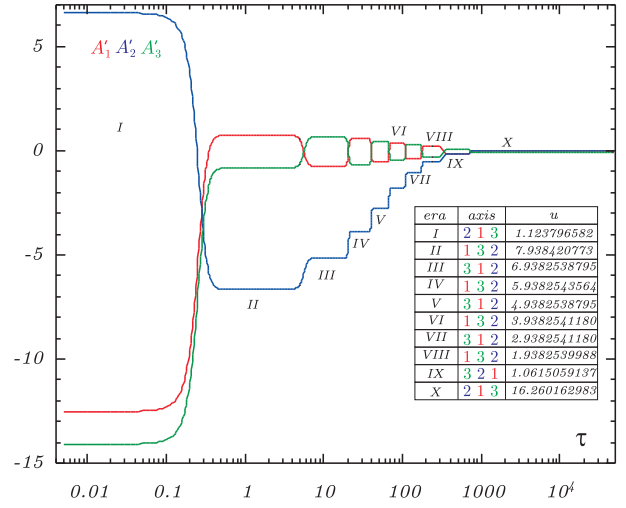


FIG. 6.3 – Représentation graphique des solutions numériques obtenues pour une dynamique B_{IX} vide avec des conditions initiales quasi kasnériennes issues des relations (6.4) et (6.5) avec $x_o \simeq 1.12$, $y_o \simeq 1.98$, $\omega_o = 20$ et $\Omega_o \simeq -0.54$. Le tableau indique la valeur de u et la disposition des trois facteurs d'échelles dans chacune des ères de Kasner atteintes.

plus ou moins loin de la singularité. Pour une valeur donnée Ω_o , la durée de la période transitoire avant accrochage complet de la transition kasnérienne doit donc être inversement proportionnel à la valeur de ω_o . Ce comportement se vérifie tout à fait lors des simulations. Sur la figure 6.3 nous avons repris les mêmes valeurs pour x_o , y_o et Ω_o mais nous nous sommes numériquement rapprochés de la singularité ($\omega_o = 20$).

La représentation de cette solution est sans équivoque : dès la première ère, correspondant aux valeurs des conditions initiales, nous sommes déjà dans un état kasnérien et l'écart entre $u = 1.1257\dots$ et $x_o = 1.1234\dots$ est très faible.

Conditions initiales anti-kasnériennes

Pour montrer à quel point l'accrochage à une transition kasnérienne est persistant nous avons enfin choisi des conditions initiales "anti-kasnériennes". Il suffit pour cela de choisir, dans les conditions initiales quasi-kasnérien, $\omega_o < 0$ et $\Omega_o > 0$ (ceci est possible car l'équation (6.6) possède toujours une racine $\chi > 1$). Comme on peut le voir sur la figure 6.4, ce type de conditions initiales (peu astucieuses) pour lesquelles, à $\tau = 0$ deux axes sont en expansion et un axe en contraction (anti-kasnérien), fournissent une dynamique du même type que les précédentes. La seule différence notable est simplement le fait que le "transitoire" est plus agité, car il faut "retourner" l'état du système, mais le résultat est le même. Dès que $\tau \approx 100$, le système "accroche" *ad infinitum* la transition entre ères de Kasner paramétrées suivant la carte (5.28).

Les trois types de conditions initiales testées (aléatoires, quasi et anti-kasnériennes) manifestent toutes l'accrochage au régime de transition kasnériennes dicté par la carte issue de la dynamique B_{II} . Nous avons en outre mis en évidence le fait que l'adéquation entre le modèle théorique et le résultat numérique est d'autant plus bonne que l'on se rapproche de la singularité.

Lorsque le temps conforme est la variable dynamique la singularité est repoussée à $\tau \rightarrow \pm\infty$, même si la durée des ères est de plus en plus longue, il semble donc que la singularité ne soit atteinte qu'après une succession infinie d'ères de Kasner. De plus, bien que la carte (5.28) soit complètement déterministe, il semble clair qu'elle présente une sensibilité aux conditions initiales. L'objet de la prochaine section vise à déterminer si cette propriété de la dynamique asymptotique se transpose dans la dynamique B_{IX} . Deux test complémentaires ont été menés, ils concernent l'influence de la matière barotropique d'indice Γ sur la dynamique B_{IX} . Ils confirment les déclarations théoriques :

- Si $0 \leq \Gamma < 2$ les oscillations et donc la dynamique sont inchangées.
- Si $\Gamma = 2$ Il existe un temps τ_c tel que si $\tau > \tau_c$ les 3 A_i sont négatifs, les oscillations s'arrêtent, les trois facteurs d'échelle collapent uniformément vers la singularité (voir Figure 6.5)

6.1.2 L'attracteur de la dynamique

Le fait que la dynamique B_{IX} ne soit pas intégrable, laisse présager l'apparition d'une forme de chaos à l'approche de la singularité. Afin de pouvoir caractériser plus avant le caractère chaotique de cette dynamique, nous allons suivre une voie initiée par Cornish et Lewin ([24]) destinée à mettre en évidence une structure fractale dans l'attracteur dont Ringström prouvera l'existence quelques années plus tard.

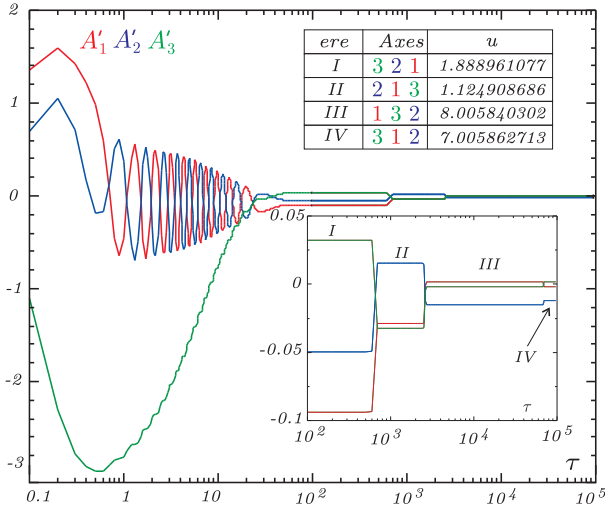


FIG. 6.4 – Représentation graphique des solutions numériques obtenues pour une dynamique B_{IX} vide avec des conditions initiales anti- kasnériennes

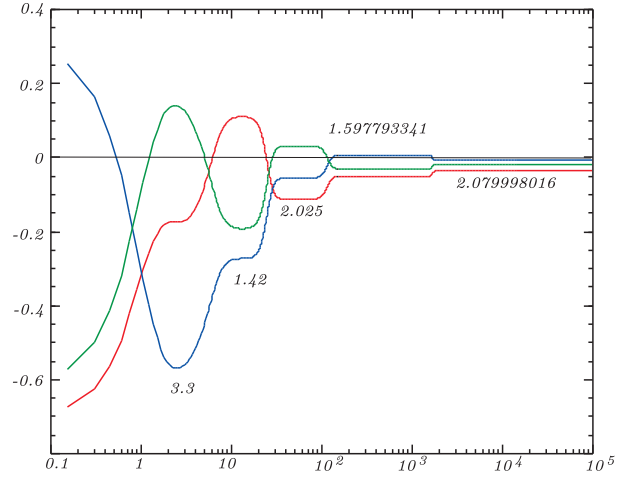


FIG. 6.5 – Représentation graphique des solutions numériques obtenues pour une dynamique B_{IX} avec matière raide ($\Gamma = 2$) pour des conditions initiales kasnériennes

Les travaux de Cornish et Lewin demeurant superficiels, nous avons décidé de les reprendre en détail tant dans leur mise en œuvre que dans leur interprétation. Il s’agit de représenter la dynamique du système dans un plan simulant une section de Poincaré. Nous avons en effet montré au paragraphe précédent que les différents choix possibles de conditions initiales conduisaient à une dynamique semblable. Cette dynamique est essentiellement décomposable en deux domaines : un transitoire complexe suivi d’une succession illimitée de transitions kasnériennes paramétrées par la carte (5.28).

Nous choisissons donc d’étudier la sensibilité aux variations de conditions initiales dans le cas où celles-ci sont proches d’un état de Kasner (cf 6.1.1).

Dans ce contexte parmi les 6 degrés de liberté du système deux sont fixés ($H = 0$, et $A_2(0) = 0$), deux ont un comportement régulier (Ω_o et ω_o) car ils représentent le volume de l’Univers et sa dérivée dont le comportement est monotone et régulier (cf. 5.2.1). Seuls x_o et y_o semblent pouvoir receler la complexité de la dynamique. Nous choisissons donc de faire des coupes de la dynamique dans le plan (x_o, y_o) .

Pour une valeur fixée Ω_o et ω_o (une carte), nous avons déterminé 25 000 conditions initiales par carte, correspondant à un choix de (x_o, y_o) répartis dans l’ensemble $[1, 2] \times [1, 2]$ projeté sur une grille régulière 500×500 .

Pour chaque condition initiale, nous avons résolu numériquement le système (6.1) par le même algorithme et dans les mêmes conditions que celles décrite au paragraphe précédent. Après une phase transitoire ce dernier ”accroche” dans tous les cas une succession de transitions kasnériennes que nous stoppons dès que son paramètre u devient plus grand qu’un certain seuil u_{exit} . Nous codons alors, le résultat par une couleur (3 :vert, 2 :bleu, 1 :rouge) associée à l’axe en expansion ($p_i < 0$) au moment où $u > u_{exit}$.

Plusieurs critiques peuvent d’ores et déjà être avancées : La technique utilisée décrit une dynamique tronquée. La véritable dynamique de l’Univers B_{IX} vide correspond à $u_{exit} = +\infty$. Nous devons donc étudier les variations de nos résultats en fonction de u_{exit} . Les choix de Ω_o et ω_o conditionnent comme nous l’avons vu la durée et l’influence du transitoire, lors de nos conclusions nous devons donc nous affranchir des éventuels effets introduits par les variations de ces paramètres.

De façon générique la figure obtenue lors de nos simulations possède une structure multifractale (voir figure 6.6).

Afin de quantifier plus avant cette structure nous avons décidé de calculer les différentes dimensions de Hausdorff associées à chacune des cartes obtenues. Cette grandeur est définie par

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (6.8)$$

Où $N(\varepsilon)$ est le nombre de points sur l’attracteur dans le carré de coté ε centré sur un point arbitraire de l’attracteur. Trois attracteurs mêlés sont présents sur chacun de nos graphiques : Le rouge, le bleu et le vert. Il correspondent chacun à un état de sortie identique du processus décrit plus haut. Si aucun des axes n’est privilégié par notre dynamique tronquée les trois dimensions de Hausdorff de chacun des attracteurs doivent être égales. Une dimension ”moyenne” d_m a aussi été calculée en pondérant chaque dimension $d_{r,b,v}$ par la proportion respective de points rouges, bleus ou verts présents dans la carte.

Nous avons obtenus les résultats suivants dans le cas $\omega_o = 1$, (avec 500 points choisis au hasard sur l’attracteur).

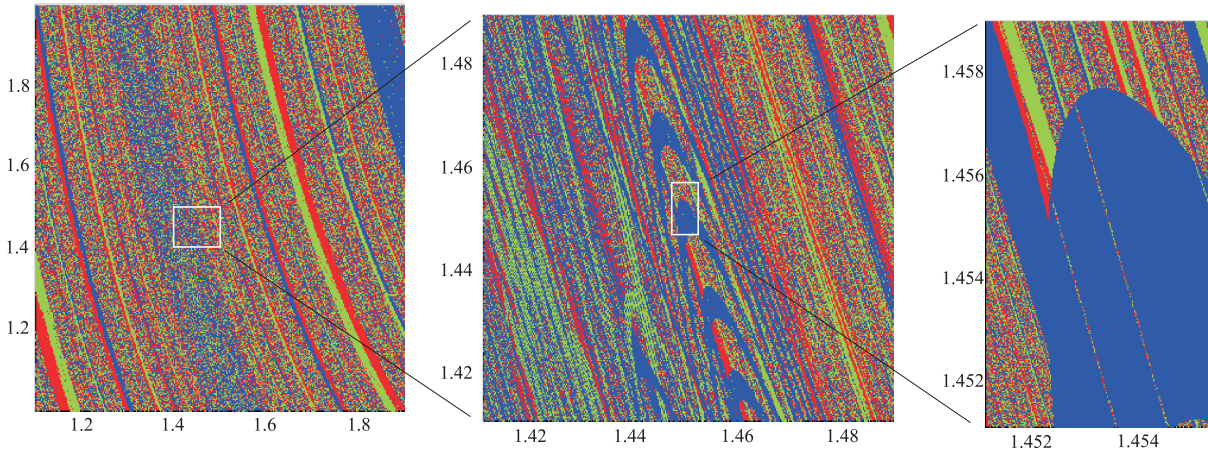


FIG. 6.6 – Cartes correspondant à la dynamique B_{IX} vide. La représentation s’effectue dans le plan (x_o, y_o) découpé en une grille régulière 500×500 . Pour chaque condition initiale nous avons choisi $\omega_o = 1/3$ et stoppé la dynamique dès que $u \geq u_{exit} = 8$. Les couleurs indiquent le facteur d’échelle associé à l’indice de Kasner négatif : rouge $\leftrightarrow A_1$, bleu $\leftrightarrow A_2$ et vert $\leftrightarrow A_3$.

$(u, v) \in [1.0, 2.0] \times [1.0, 1.9]$	$(u, v) \in [1.4, 1.5] \times [1.4, 1.5]$
$d_r = 1.6751 \pm 0.0093$	$d_r = 1.6317 \pm 0.0114$
$d_b = 1.6779 \pm 0.0078$	$d_b = 1.6537 \pm 0.0099$
$d_v = 1.7252 \pm 0.0111$	$d_v = 1.7921 \pm 0.0111$
$d_m = 1.6918 \pm 0.0094$	$d_m = 1.6772 \pm 0.0108$

La valeur indiquée de la dimension correspond à la valeur moyenne des 500 résultats, l’erreur est estimée au triple de l’écart-type des mesures. Il est clair que la valeur numérique de cette dimension fractale dépend des deux facteurs imposés par le type de simulations numériques que nous effectuons : La dissymétrie dans les valeurs d_r, d_b et d_v est tout à fait explicable par la rupture de symétrie que nous imposons par notre choix d’annuler l’un des facteurs d’échelle à $\tau = 0$, pour oublier ce choix particulier et en quelque sorte rendre isotrope notre dimension fractale, il conviendrait d’augmenter la valeur de u_{exit} . La valeur de la dimension est sans doute aussi affectée par le choix de ω_o : En effet, pour $\omega_o \gg 1$, la période transitoire est définitivement absente et le système est immédiatement dans une phase d’oscillations entre ères de Kasner, les cartes correspondantes ne doivent alors plus dépendre du paramètre y_o . Pour vérifier les comportements prévus nous avons donc réalisé deux séries de cartes complémentaires : Pour la première série nous avons fixé u_{exit} et modifié le paramètre ω_o de chaque simulation, afin de tenter de mettre en évidence une progressive non influence de y_o dans les résultats. C’est bien ce que montre la figure 6.7.

Pour des valeurs croissantes de ω_o les cartes obtenues deviennent de plus en plus indépendantes de la valeur de y_o . Ce dernier paramètre est nécessaire à un bon balayage de l’ensemble des conditions initiales possibles mais n’affecte pas la structure de l’attracteur final. Tout ceci conformément au Théorème de Ringström.

Pour la deuxième série de cartes (figure 6.8), en conservant $\omega_o = 4$, nous avons étudié l’influence de u_{exit} sur les différentes valeurs de dimensions de Hausdorff.

Là encore le résultat est sans appel, la largeur des ”bandes” isochromes diminue lorsque u_{exit} augmente. Ces bandes qui sont associées à des points fixes correspondant aux valeurs fractionnaires de x_o , sont le facteur essentiel de dissymétrie des valeurs des dimensions. Cette dimension s’isotropise donc bien lorsque u_{exit} augmente. Ceci est encore plus visible sur la figure 6.9 où sont représentées les différentes dimensions des attracteurs correspondants aux cartes ci dessus en fonction de u_{exit} .

La dynamique B_{IX} vide est donc caractérisée par l’existence d’un attracteur possédant une structure multi fractale. Cette caractéristique est de façon générique associée à la présence de chaos.

6.2 Modélisation numérique des billards de Bianchi

Deux illustrations des résultats analytiques sont envisagées dans cette section. Dans un premier temps nous nous attacherons à vérifier si les solutions des équations de la dynamique hamiltonienne sont bien idéalisables par le mouvement d’une bille à l’intérieur des bandes d’un billard. Dans un second temps nous nous efforcerons de mettre en

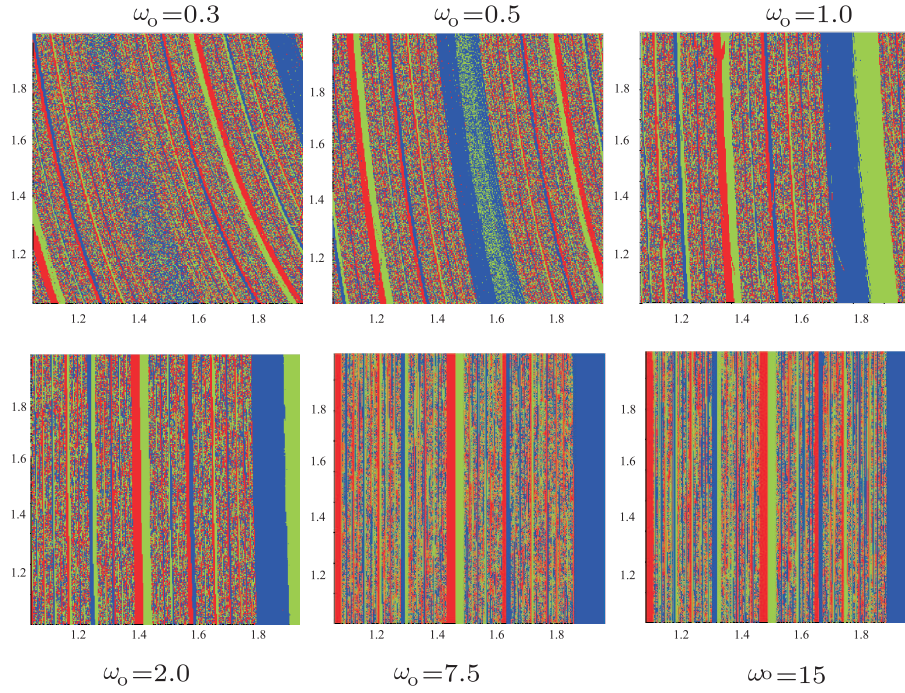


FIG. 6.7 – Cartes représentant la dynamique B_{IX} vide calculée pour u_{exit} fixé ($= 8$) et diverses valeurs de $\omega_o = 0,3 ; 0,5 ; 1,0 ; 2,0 ; 7,5$ et 15 .

évidence certaines des propriétés chaotiques prévues par la transition coin mou - coin dur dans la dynamique B_{IX} . Sans contrepartie analytique autre que la présomption, nous terminerons par la présentation de l'attracteur fractal que nous avons pu mettre en évidence en couplant les approches BKL et Billard pour la dynamique B_{VIII} .

6.2.1 Solutions des équations du mouvement dans les billards statiques

Afin d'illustrer les calculs analytiques effectués lors de la section 5.3, nous allons dans un premier temps résoudre numériquement les équations de la dynamique des Univers de Bianchi dans le formalisme hamiltonien. Pour mettre pleinement en évidence numériquement le comportement d'une bille à l'intérieur d'un billard, nous imposerons une contrainte supplémentaire de la forme

$$m = e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_3} = 1$$

Cette contrainte du type $t = cste^3$, permet de caractériser les différentes phases dynamiques vécues par l'Univers lors de son approche vers la singularité, de façon plus imagée cela revient à stopper l'expansion des bandes du billard afin de mieux étudier ses propriétés dynamiques. Le système différentiel⁴ à résoudre s'écrit donc conformément à (5.34)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial \xi(q_1, q_2)}{\partial q_1} \\ \frac{dp_2}{dt} = \frac{\partial \xi(q_1, q_2)}{\partial q_2} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dq_1}{dt} = p_1 \\ \frac{dq_2}{dt} = p_2 \end{array} \right. \quad (6.9)$$

de telle équations assurent la conservation de la quantité $E := (p_1^2 + p_2^2)/2 - \xi(q_1, q_2)$:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial E}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial E}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} = 0$$

Le potentiel $\xi(q_1, q_2)$ est donné par la relation (4.30) que nous rappelons ci dessous

$$\begin{aligned} \xi(q_1, q_2) = & -n_1^2 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}q_2 + \sqrt{2}q_1\right)} - n_2^2 e^{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}q_2 - \sqrt{2}q_1\right)} - n_3^2 e^{-\frac{2\sqrt{6}}{3}q_2} \\ & + 2n_1 n_2 e^{\frac{\sqrt{6}}{3}q_2} + 2n_1 n_3 e^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}q_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}q_2\right)} + 2n_2 n_3 e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}q_1 + \frac{\sqrt{6}}{6}q_2\right)} \end{aligned} \quad (6.10)$$

³Nous avons en effet signalé à nombreuses reprises que q_3, V ou t étaient en relation bijective.

⁴Le paramètre t utilisé dans ces équations est sans rapport le temps t indiqué par les horloges comobiles de notre Univers anisotrope. Il est par contre associé au mouvement d'une particule de masse fixe ($m = 1$) dans le potentiel ξ .

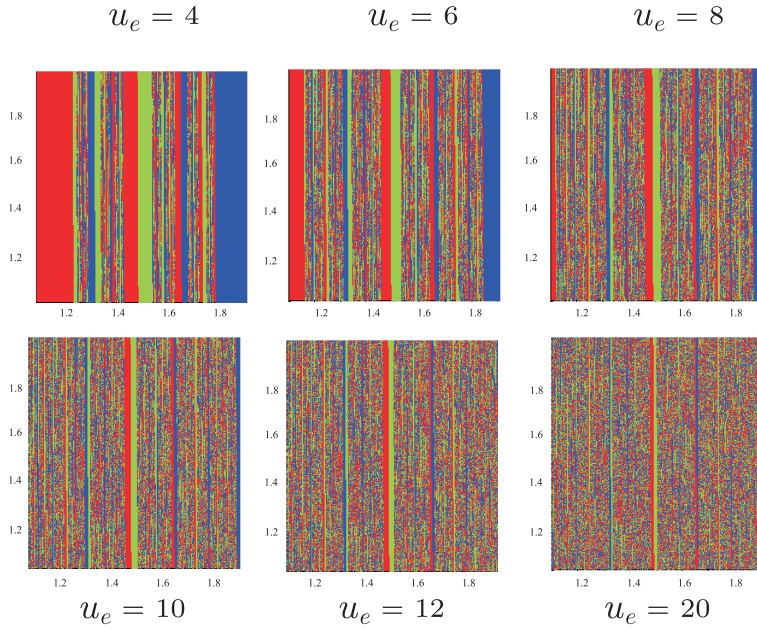


FIG. 6.8 – Cartes représentant la dynamique B_{IX} vide calculée pour ω_o fixé (= 4) et diverses valeurs de $u_{exit} = 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12$ et 20 .

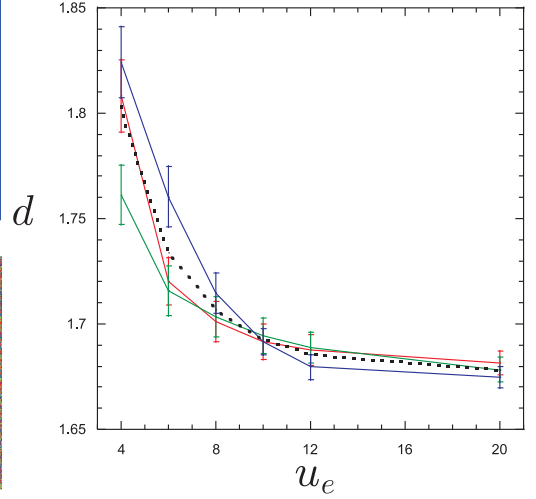


FIG. 6.9 – Dimension de Hausdorff en fonction de u_e

Les conditions initiales du système (6.9), i.e. $(q_1, q_2)_{t=0} = (q_{1o}, q_{2o})$ et $(dq_1/dt, dq_2/dt)_{t=0} = (p_{1o}, p_{2o})$ sont liées par la contrainte

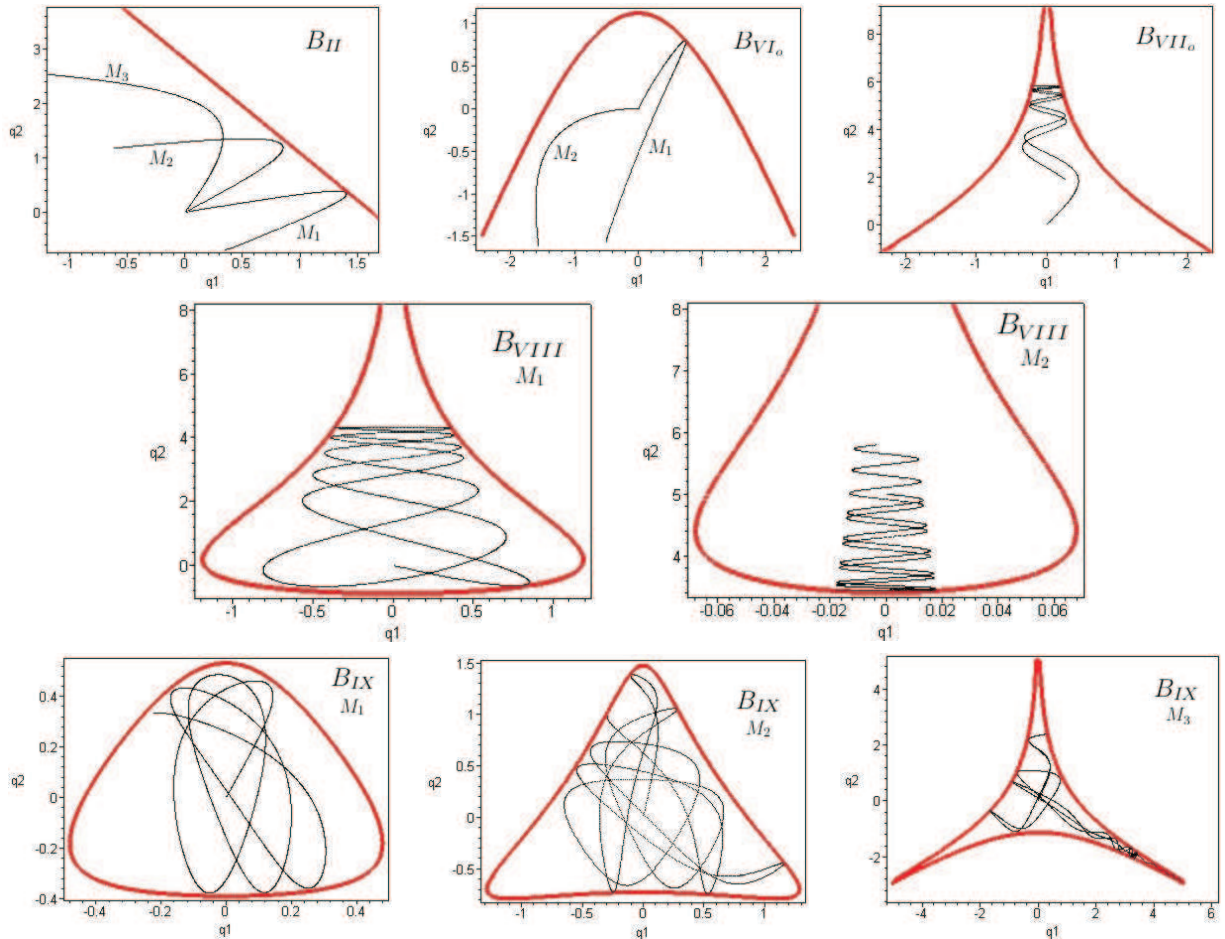
$$E = \frac{p_{1o}^2 + p_{2o}^2}{2} - \xi(q_{1o}, q_{2o})$$

qui constitue une intégrale première. Pour chacun des modèles étudiés nous avons choisi les conditions initiales suivantes

Modèle	E	(q_{1o}, q_{2o})	(p_{1o}, p_{2o})
B_{II}	10	(0, 0)	$M_1 : (4, \sqrt{2})$ $M_2 : (2\sqrt{2}, \sqrt{10})$ $M_3 : (\sqrt{2}, 4)$
B_{VI_o}	10	(0, 0)	$M_1 : (2, 2\sqrt{2})$ $M_2 : (-2\sqrt{3}, 0)$
B_{VII_o}	10	(0, 0)	$(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$
B_{VIII}	$M_2 : 1$ $M_1 : 10$	(0, 5) (0, 0)	(0.2, -0.95) (2, $-\sqrt{6}$)
B_{IX}	$M_1 : -2.8$ $M_2 : -2.1$ $M_3 : 0$	(0, 0)	(0.25, 0.58) (0.25, 1.31) (1, $\sqrt{5}$)

(6.11)

Pour chacune de ces conditions initiales nous avons résolu le système (6.9), les portraits de phase des différentes solutions obtenues sont représentées sur les figures ci-après.



Sur chacune de ces figures nous avons représenté en plus de l'orbite issue des conditions initiales, l'isovaleur $\xi = -E$. Les rebonds analytiques sont remarquablement observables pour chacun des modèles. Plusieurs remarques s'imposent :

- Le rebond non spéculaire sur bande rectiligne à la Misner et Ryan (voir section 5.3.3 ou directement [41]) se confirme très bien dans le cas de B_{II} pour lequel la transition semble bien vérifier $\theta_r > \theta_i$ en accord avec (5.41). Par contre tous les autres cas d'interaction avec une bande rectiligne semblent plutôt indiquer une réflexion symétrique par rapport à la direction normale à la tangente au point de rebroussement, comme prévu par la solution analytique de l'équation (5.36). Les réflexions quasi-spéculaires que nous observons sont peut-être imputables au fait que nous stoppons l'éloignement des bandes ($m' = 0$) dans notre modèle ce qui revient à prendre

$$\left(\frac{dq_3}{d\tau}\right)_i = \left(\frac{dq_3}{d\tau}\right)_r$$

et donc $\sin \theta_i = \sin \theta_r$ selon (5.39).

- L'argument analytique que nous avons mis en avant pour montrer que la bille qui s'engage dans le canal de B_{VIII} ou le coin dur de B_{IX} rebrousse chemin est magnifiquement mis en évidence pour M_1 de B_{VIII} et M_3 de B_{IX} .

Dans le vide, deux modèles étaient pointés du doigt par notre analyse d'intégrabilité : B_{VIII} et B_{IX} . La mise en évidence de l'attracteur fractal pour la dynamique B_{IX} (cf. section 6.1.2, e.g. [24]) avait d'ailleurs confirmé ces soupçons. L'analyse des trajectoires vient ici apporter un complément de choix . Nous constatons en effet, que les propriétés dynamiques des orbites sont en accord avec les résultats analytiques évoqués dans la section 5.3.4 :

- La dynamique loin de la singularité (i.e. faibles valeurs de E soit M_1 ou M_2 pour B_{IX} et M_2 pour B_{VIII}) semble bien associée à des orbites de type périodique.
- La dynamique plus proche de la singularité (i.e. plus grandes valeurs de E , soit M_3 pour B_{IX} et M_1 pour B_{VIII}) semble bien associée à des orbites plus "chahutées".

Bien que révélateurs, les portraits de phases ne sont pas adaptés pour une qualification précise de la nature chaotique des orbites d'un système, nous préférons pour ce faire utiliser des outils plus précis tels que les sections de Poincaré. Tel est l'objet de la prochaine section.

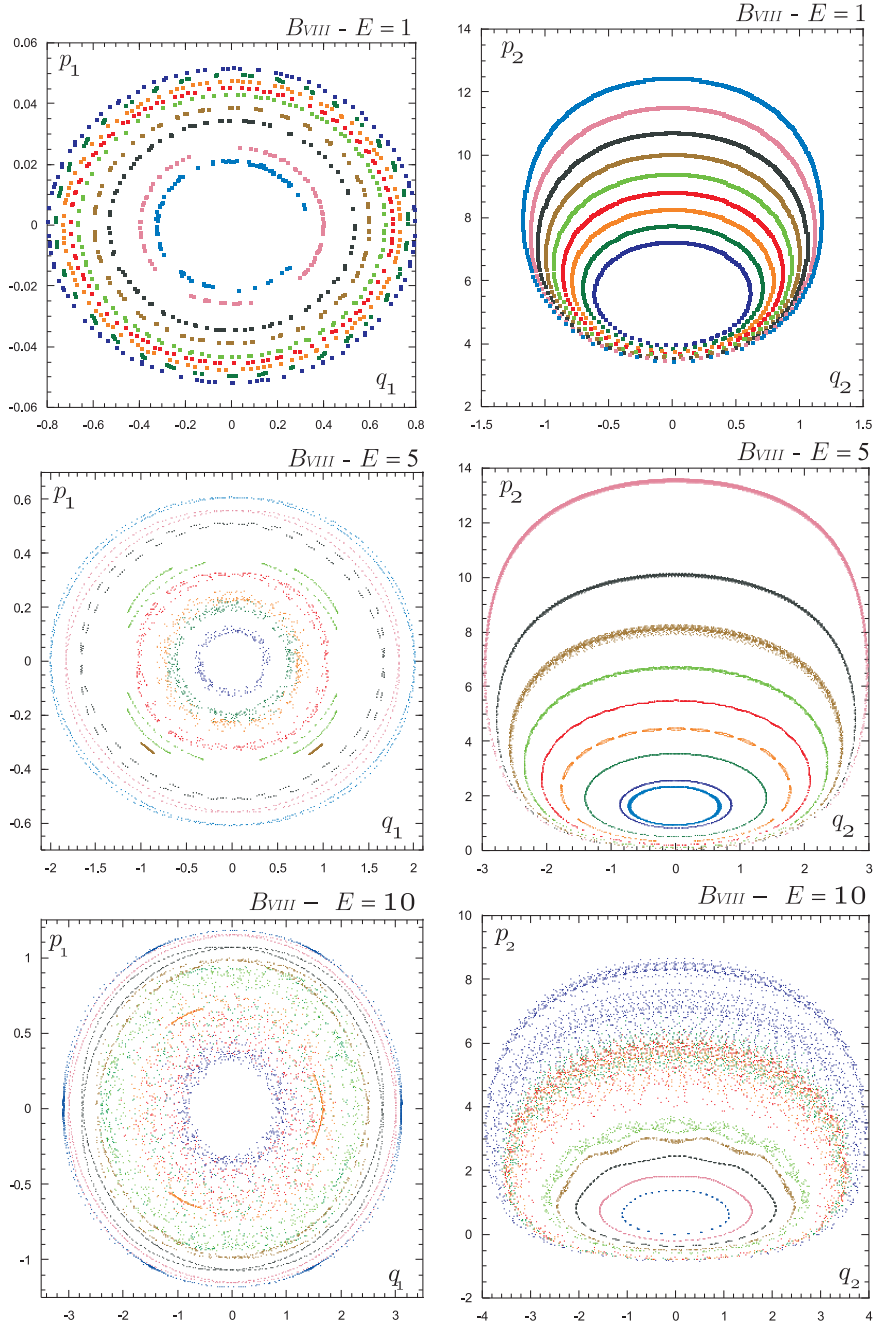
6.2.2 Étude numérique de la transition vers le chaos

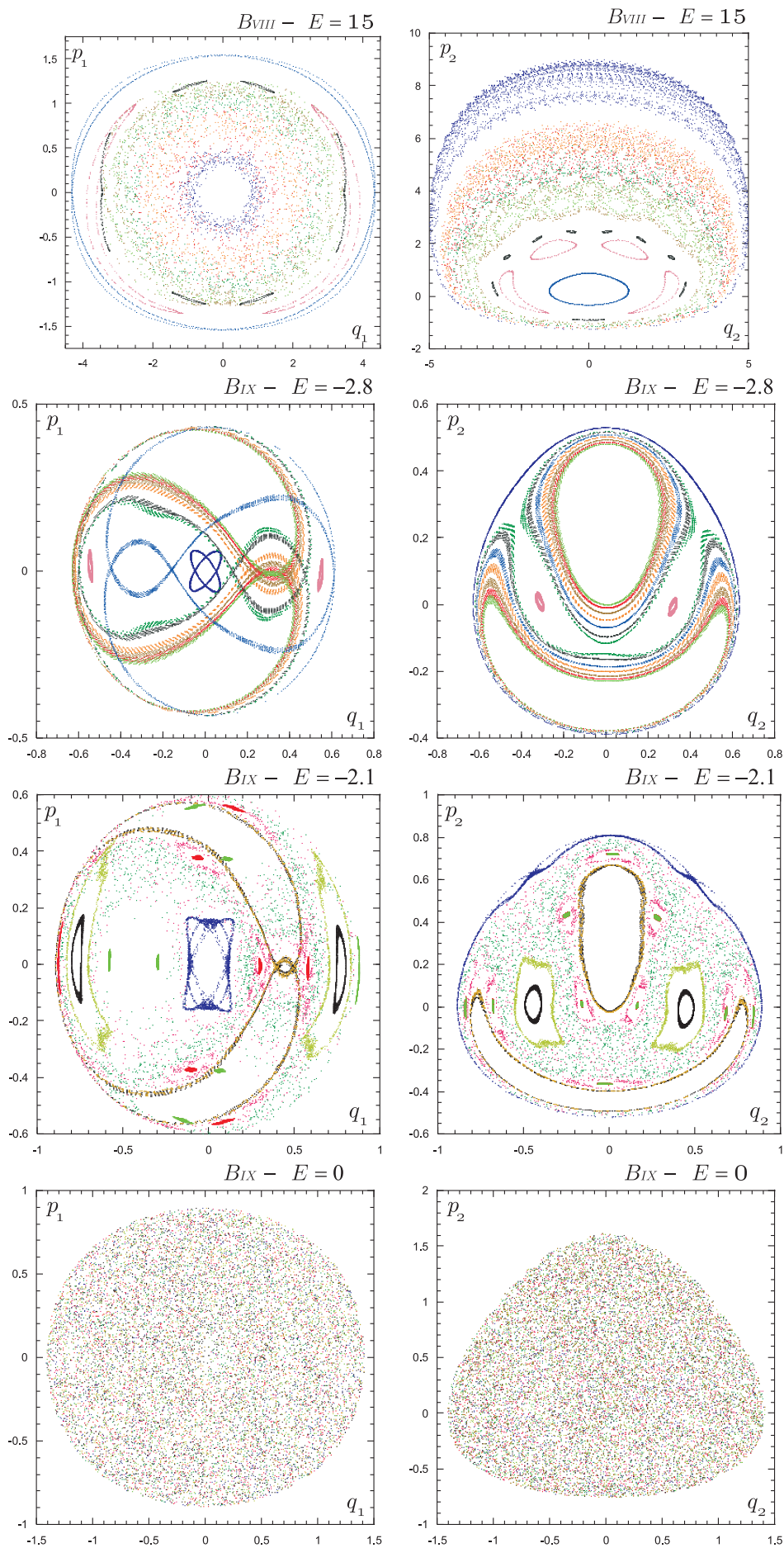
Afin de préciser les éventuelles propriétés chaotiques des billards suspects intervenant dans les dynamiques B_{VIII} et B_{IX} , nous avons procédé à une analyse via des sections de Poincaré : Pour les systèmes dynamiques décrits par les

équations (6.9) qui se mettent sous la forme hamiltonienne

$$i = 1, 2 \quad \begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial E}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial E}{\partial q_i} \end{cases} \quad \text{avec} \quad E = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \xi(q_1, q_2)$$

Pour les valeurs de E de chacun des modèles M_1, M_2, M_3 de B_{IX} et M_1, M_2 de B_{VIII} (ainsi que trois intermédiaires), nous avons considéré un jeu de 9 conditions initiales réparties uniformément dans l'espace des phases du modèle et déterminé l'intersection des orbites correspondantes avec les hyperplans $\Pi_1 = \{q_1 = 0, p_1 = 0\}$ et $\Pi_2 = \{q_2 = 0, p_2 = 0\}$. Les points d'intersection se répartissent donc dans le plan (q_2, p_2) pour la coupe par Π_1 et (q_1, p_1) pour la coupe par Π_2 . Les figures correspondantes sont représentées ci-après.





Dans les deux cas la transition vers le chaos s'effectue bien alors que l'on se rapproche de la singularité ($E \nearrow$) :

- Loin de la singularité (faibles valeurs de E) les orbites sont quasi-périodiques, les intersections avec Π_1 et Π_2

sont donc des courbes dont l'épaisseur n'est due qu'aux erreurs numériques et à une trop faible résolution, ces intersections sont idéalement de mesures nulle dans le plan.

- Proche de la singularité (fortes valeurs de E) les orbites sont périodiques, les intersections ont tendance à se répartir dans des régions denses de l'espace des phases, elles ne sont plus de mesure nulle, c'est le chaos.

Notons de plus que la valeur de E correspondant à la transition chaotique théorique pour le billard B_{IX} est $E = -2, 52$ (voir page 44), cette valeur est en parfait accord avec ces résultats numériques.

6.2.3 Comparaison d'attracteurs

Les équations des dynamiques B_{VIII} et B_{IX} s'écrivent dans le vide et en variable BKL de la façon suivante

$$\begin{cases} 0 &= E_c + E_p = H \\ A_1'' &= (e^{A_2} \mp e^{A_3})^2 - e^{2A_1} \\ A_2'' &= (e^{A_3} \mp e^{A_1})^2 - e^{2A_2} \\ A_3'' &= (e^{A_1} - e^{A_2})^2 - e^{2A_3} \end{cases} \quad (6.12)$$

Le signe du haut correspond à l'Univers B_{IX} alors que celui du bas représente B_{VIII} . La section précédente semble montrer que la présence du canal assure la transition vers le chaos à l'approche de la singularité dans la dynamique B_{VIII} . Nous avons déjà mis en évidence une telle propriété dans la dynamique B_{IX} , la transition étant dans ce cas assuré par la présence des coins durs. L'objectif de cette section est donc double : En utilisant les mêmes techniques que celles utilisées pour la dynamique B_{IX} dans la section 6.1.2 (e.g. [24]), nous proposons de mettre en évidence les propriétés fractales pour la dynamique B_{VIII} . Nous seront alors en mesure comparer dynamiquement ces deux modèles à l'approche de la singularité.

Afin d'explorer une partie de l'espace des phases directement associée au canal des billards B_{VIII} et au coin dur des billards B_{IX} , nous avons choisi des conditions initiales basées sur la dynamique hamiltonienne (cf.(4.28)) :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}_{ini} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \ln a \\ \Omega \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}_{ini} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \omega \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

La valeur initiale Ω de q_3 est déterminée par la contrainte (cf. (4.31)) $H = 0$ dans le vide. Le choix initial de (q_1, q_2) est arbitraire sans nuire à la généralité de l'approche, il se situe sur l'axe de symétrie du potentiel ξ , la forme de q_2 permet d'obtenir une valeur de Ω relativement simple :

$$H = 0 \quad \iff \quad \Omega = \frac{3}{\sqrt{6}} \ln \left(\pm \frac{a^4 (1 - \omega^2)}{2(4a^3 \mp 1)} \right)$$

Pour que la quantité dans le logarithme soit positive pour les deux types d'Univers il faut que $a < 4^{-3/2}$, nous avons choisi $a = 1/2$. Pour décrire l'approche de la singularité la variation du volume de l'Univers doit être négative, il convient donc de choisir $\omega < 0$. Une variation de θ permet de varier l'angle de la vitesse de départ dans la représentation billard, une variation de ω permet de se placer plus ou moins proche de la singularité (cf. section 6.1.1).

Nous avons vérifié qu'après une phase transitoire, toute condition initiale issue d'un couple (θ, ω) converge vers un cycle d'oscillations kasnériennes illimitées et descriptibles par des transitions de type B_{II} . En généralisant l'idée de Cornish et Lewin [24] (voir aussi notre étude section 6.1.2), nous avons pu construire un attracteur pour la dynamique B_{VIII} , en faisant varier (θ, ω) dans $[0, \pi/2] \times [-2, -3]$ sur une grille régulière 500×500 , et en stoppant la dynamique dès que $u > u_{exit} = 8$. Les cartes obtenues sont présentée sur la figure 6.10 pour la dynamique B_{VIII} et sur la figure 6.11 pour la dynamique B_{IX} .

Le caractère fractal de ces deux cartes ne fait aucun doute, les deux dynamiques sont donc chaotiques. La dépendance en θ indique que les conditions initiales dirigées vers le canal ou le coin dur correspondent à des dynamiques beaucoup plus complexes que les autres. Cette remarque confirme bien le fait que ce chaos trouve bien son origine dans les coins dur ou le canal. Une analyse plus fine de ces deux cartes peut être envisagée via le calcul de la dimension de Hausdorff (cf. (6.8)), on trouve

$$\begin{aligned} d_r &= 1.6944 \pm 7.8 \times 10^{-3} \\ d_b &= 1.7034 \pm 7.9 \times 10^{-3} \\ d_v &= 1.6947 \pm 10.8 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

et une valeur moyenne pondérée par les surface de $d_m = 1.6976 \pm 8.9 \times 10^{-3}$ pour l'attracteur de la dynamique B_{VIII} et

$$\begin{aligned} d_r &= 1.7183 \pm 7.6 \times 10^{-3} \\ d_b &= 1.7256 \pm 9.7 \times 10^{-3} \\ d_v &= 1.6992 \pm 9.6 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

avec une valeur moyenne pondérée par les surface de $d_m = 1.7141 \pm 8.5 \times 10^{-3}$ pour l'attracteur de la dynamique B_{IX} . L'aspect général ainsi que les deux dimensions des deux cartes étant compatibles nous pouvons sereinement en déduire une certaine équivalence entre les deux dynamiques.

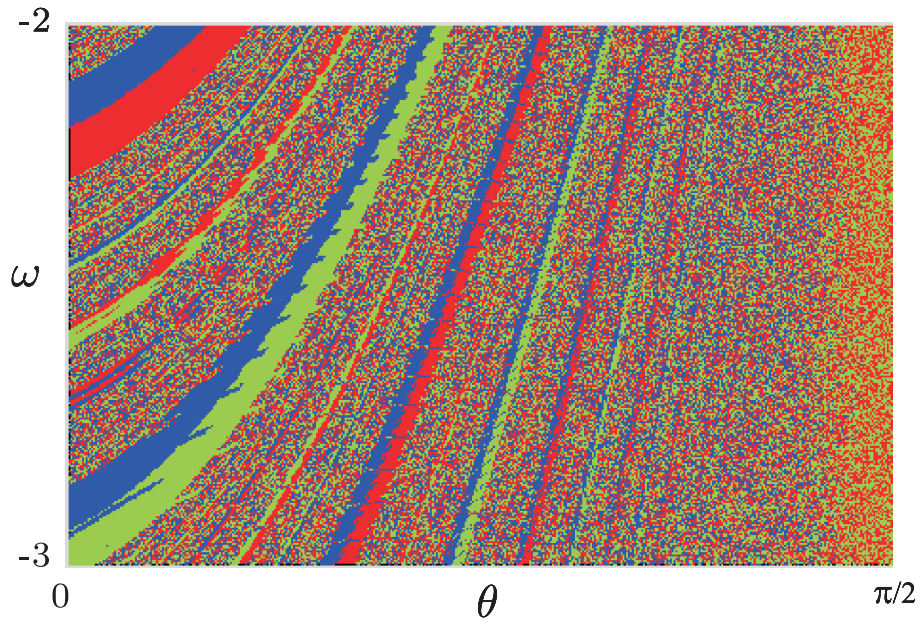


FIG. 6.10 – Carte correspondant à la dynamique B_{VIII} vide. La représentation s'effectue dans le plan (θ, ω) découpé en une grille régulière 500×500 . Pour chaque condition initiale issue de (6.13), la dynamique est stoppée dès que $u \geq u_{\text{exit}} = 8$. Les couleurs indiquent le facteur d'échelle associé à l'indice de Kasner négatif : Rouge $\leftrightarrow A_1$, Bleu $\leftrightarrow A_2$ et Vert $\leftrightarrow A_3$.

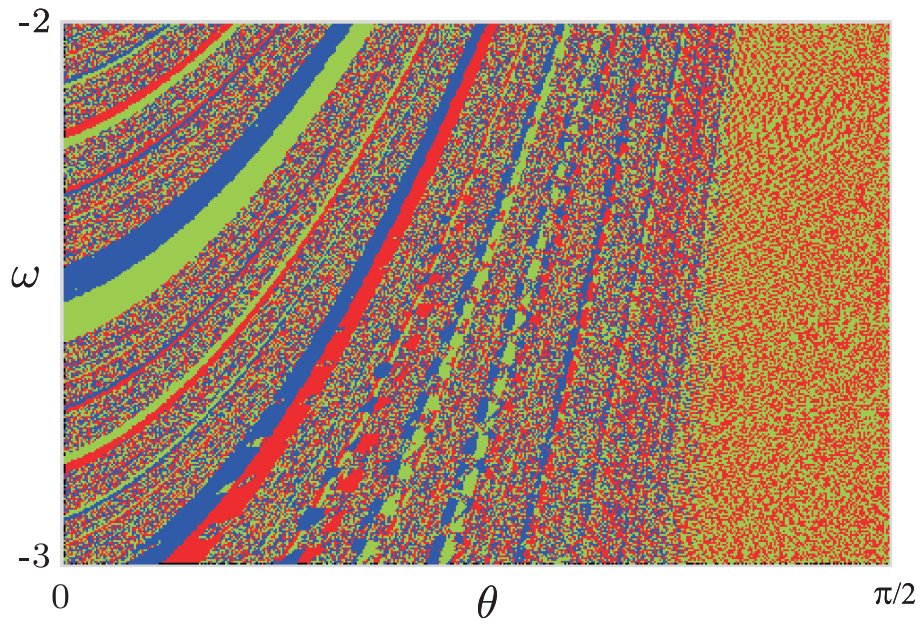


FIG. 6.11 – Carte obtenue avec la même représentation que la Figure 6.10 mais pour la dynamique B_{IX} .

Chapitre 7

Conclusion

Dans cette première partie nous avons étudié la dynamique associée aux solutions des équations d'Einstein de la relativité générale dans le contexte d'un Univers homogène et anisotrope (Univers de Bianchi).

Nous avons dans un premier temps introduit de façon progressive trois formalismes équivalents pour ce problème : BKL, Hamiltonien et Toda généralisé. Nous nous sommes alors posés la question de l'intégrabilité des dynamiques de Bianchi de façon globale. Cette étude a permis de mettre en évidence quatre classes de dynamiques équivalentes d'un point de vue algébrique :

- Classe 1 : Univers de Bianchi I et V
- Classe 2 : Univers de Bianchi II et IV
- Classe 3 : Univers de Bianchi III, VI et VII
- Classe 4 : Univers de Bianchi VIII et IX

Ces classes sont directement reliées à la dimension des sous-espaces nilpotents de la partie symétrique du tenseur de structure du groupe des déplacements (voir tableau de la page 16). Cette remarque permet peut-être d'entrevoir une généralisation possible de ces résultats pour des espaces possédant des dimensions supplémentaires.

Le comportement général du volume des Univers de Bianchi ainsi que les dynamiques B_I et B_{II} ont alors été détaillés. Le mécanisme de la transition BKL pour la dynamique B_{IX} a été décortiqué.

Dans le formalisme hamiltonien, nous avons présenté l'analogie entre la dynamique des Univers de Bianchi et le mouvement d'une bille dans un billard à bandes mobiles. Une analyse fine du billard B_{IX} couplée à certains résultats de la théorie des systèmes dynamiques, nous a permis de mettre en évidence la vraisemblable transition vers le chaos de la dynamique B_{IX} à l'approche de la singularité.

Sur le plan numérique, nous avons repris et complété l'analyse de Cornish et Lewin sur l'existence d'un attracteur fractal pour la dynamique B_{IX} . Nous avons illustré les propriétés dynamiques envisagées pour les différents billards associés aux divers Univers de Bianchi. Nous avons finalement mis en évidence un attracteur fractal pour la dynamique B_{VIII} .

De façon générique la dynamique des Univers homogènes peut se résumer comme suit :

1. Dans le vide ou en présence de matière barotrope $0 \leq \Gamma < 2$:
 - Classe 1 : Dynamique monotone de type Kasner ;
 - Classe 2 : Transition entre 2 états de Kasner ;
 - Classe 3 : Nombre fini de transitions entre états de Kasner ;
 - Classe 4 : Infinité de transitions entre états de Kasner .

Les classes 1,2,3 sont généralement intégrables, ce qui n'est pas le cas de la classe 4, pour laquelle l'approche de la singularité ($t = 0$) est chaotique

2. En présence de matière raide $\Gamma = 2$:

Tous les modèles tendent vers la singularité ($t = 0$) de façon régulière. Cette approche n'est pas kasnérienne : Les trois facteurs d'échelle se contractent.

En l'absence de matière raide les modèles de la classe 4 fournissent une échappatoire intéressante au problème de la singularité ouverte des équations de la relativité générale : Ce n'est plus un horizon qui protège l'expérimentateur de la singularité, mais un voile chaotique.

Chapitre 8

Annexe

8.1 Quelques propriétés algébriques

Une algèbre de Lie \mathfrak{L} est un espace vectoriel muni d'un loi de composition interne $[\cdot, \cdot]$ qui possède les propriétés suivantes

- $[\cdot, \cdot]$ est bilinéaire et antisymétrique
- $[\cdot, \cdot]$ vérifie une identité de Jacobi, c'est-à-dire

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathfrak{L}^3 \quad [\alpha, [\beta, \gamma]] + [\gamma, [\alpha, \beta]] + [\beta, [\gamma, \alpha]] = 0_{\mathfrak{L}}$$

Une façon simple de caractériser une algèbre de lie est de présenter un système de racines (ou système radiciel). Pour tout $\alpha \in \mathfrak{L}$, en notant (\cdot, \cdot) le produit scalaire sur \mathfrak{L} , on définit la réflexion σ_{α} par

$$\forall \beta \in \mathfrak{L} \quad \sigma_{\alpha}(\beta) = \beta - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

On dit que $R \subset \mathfrak{L}/\{0_{\mathfrak{L}}\}$ est un système radiciel de \mathfrak{L} si et seulement si

- R engendre \mathfrak{L}
- Pour tout $(\alpha, \beta) \in R^2$ on a $\sigma_{\alpha}(\beta) \in R$
- Pour tout $(\alpha, \beta) \in R^2$ on a

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$$

Les éléments de R sont appelés racines de \mathfrak{L} . Un sous-ensemble $B \subset R$ est appelé système de racines simple si et seulement si

- B est une base de \mathfrak{L}
- $\forall \beta \in R$, on peut écrire

$$\beta = \sum_{\alpha \in B} k_{\alpha}^{\beta} \alpha \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_{\alpha}^{\beta} \in \mathbb{Z}^+ \\ \text{ou} \\ k_{\alpha}^{\beta} \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

Les éléments de B sont appelés racines simples. Si finalement les seuls multiples de α sont $\pm\alpha$, le système est dit réduit. Pour chaque racine simple β est défini une taille (β) par la relation

$$(\beta) := \sum_{\alpha \in B} k_{\alpha}^{\beta}$$

Si $(\beta) > 0$ (resp. < 0) la racine est dite positive (resp. négative). L'ensemble des racines positives (resp. négatives) est noté R^+ (resp. R^-). On vérifie sans peine que

$$R^+ = -R^- \quad \text{et} \quad R = R^+ \cup R^-$$

Un système de racines est dit irréductible s'il ne peut s'écrire comme l'union de 2 sous ensembles orthogonaux. Un tel système est complètement déterminé par une de ses bases et correspond à une algèbre de Lie simple.

Considérons $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ une base d'un système de racines R de \mathfrak{L} . La matrice carrée C dont les éléments sont

$$\forall i, j = 1, \dots, n \quad c_{ij} := \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

est appelée matrice de Cartan de \mathfrak{L} . Les propriétés très restrictives des éléments de B font que

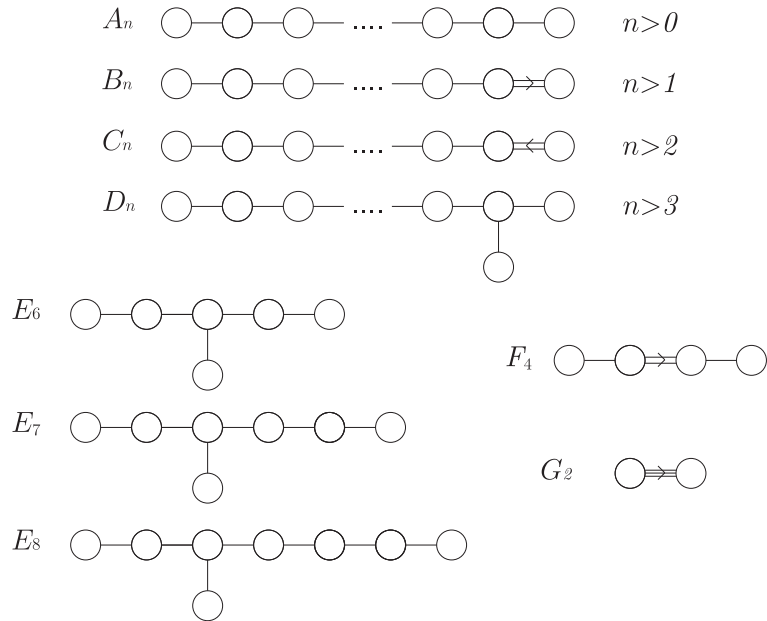
$$\text{Si } i \neq j = 1, \dots, n \quad \widehat{(\alpha_i, \alpha_j)} \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

On en déduit immédiatement que les composantes de la matrice de Cartan vérifient

$$c_{ii} = 2, \text{ et si } i \neq j \quad c_{ij} < 0, \quad c_{ij}c_{ji} \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Un ensemble B de racines simple et donc l'algèbre de Lie associée se représente schématiquement sous la forme d'un diagramme de Dynkin : Chaque racine représente un nœud du diagramme (représenté par un cercle). Les nœuds associés aux racines α_i et α_j sont reliés par $c_{ij}c_{ji}$ traits. Si $c_{ij}c_{ji} = 2$ ou 3 , α_i et α_j sont de tailles différentes, on superpose aux traits une flèche pointant vers la plus petite racine. Les diverses propriétés énumérées font que chaque racine au moins à une et au plus à deux autres, ces diagrammes ne présentent pas de boucles ce qui permet une représentation longiligne.

Il n'existe que 9 types d'algèbre de Lie simple, 4 potentiellement infinies et 5 cas exceptionnels. Les diagrammes de Dynkin associés sont représentés sur la figure ci dessous



Bibliographie

- [1] V. A. Belinskii, L.M. Khalatnikov, E.M. Lifshitz, Oscillatory approach to a singular point in relativistic cosmology, *Adv. Phys.*, 19,525,1970
- [2] R. Penrose, *Phys. Rev. Lett.* 14, 57 (1965); S. W. Hawking, *Phys. Rev. Lett.* 17, 444 (1966); S. W. Hawking and R. Penrose, *Proc. Roy. Soc. Lond.* A314, 529 (1970); S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973)
- [3] M.MacCallum, Anisotropic and Inhomogeneous Relativistic Cosmologies, dans [100], page 533-580
- [100] S. Hawking, W. Israel, *General relativity : an Einstein Centenary Survey*, Cambridge University Press, (1979)
- [2] C.W. Misner, Mixmaster Universe, *Phys. Rev. Lett.*, 22,1071, 1969
- [3] V. A. Belinskii, L.M. Khalatnikov, Effect of scalar and vector fields on the nature of the cosmological singularity, *Sov. Phys. JETP*, 36,591, 1973
- [4] J.D. Barrow, F.J. Tipler, Analysis of the generic singularity studies by Belinskii, Khalatnikov and Lifschitz, *Physics Reports*, 56, 371, 1979
- [5] J.D. Barrow, Chaotic behaviour in general relativity, *Physics Reports*, 85,1, 1982
- [6] D. F. Chernoff, J.D. Barrow, Chaos in the Mixmaster Universe, *Phys. Rev. Lett.*, 50, 134,1983
- [7] Y. Elskens, Alternative descriptions of the discrete mixmaster Universe, *Phys. Rev. D*, 28,1033, 1983
- [8] E.M. Lifshitz, I. M. Khalatnikov, Ya. G. Sinai, K.M. Khanin, L.N. Shchur, On the stochastic properties of relativistic cosmological models near the singularity, *Sov. Phys. JETP Lett.*, 38, 91, 1983
- [9] L.M. Khalatnikov, E.M. Lifchitz, K.M. Khanin, L.N. Shchur, Ya. G. Sinai, On staochasticity in relativistic cosmology, *J. of Stat. Phys.*, 38,97,1985
- [10] T. Furusawa, A. Hosoya, Is anisotropic Kaluza-Klein Model of Universe chaotic?, *Prog. Th. Phys.*, 73,467,1985
- [11] J. Demaret, M. Henneaux, P.Spindel, *Phys. Lett.* 164B, 27, 1985
- [12] J. Demaret, J.L. Hanquin, M. Henneaux, P.Spindel, A. Taormina, *Phys. Lett.* 175B, 129, 1986
- [13] ,Y. Elskens, M. Henneaux, Ergodic theory of the mixmaster Universe in higher space-time dimensions, *Nuclear Phys.*, B290,111,1987
- [14] Y. Elskens, M. Henneaux, Chaos in Kaluza-klein models, *Cass. Quantum Grav.*, 4, L161, 1987
- [15] Y. Elskens, Ergodic theory of the mixmaster Universe in higher space-time dimensions II, *J. of stat. Phys.*, 48,1269,1987
- [16] G. Francisco, G.E. Matsas, Qualitative and numerical Study of Bianchi IX models, *Gen. Rel. and Grav.*, 20,1047,1988
- [17] S.E. Rugh, Cand. Scient. Thesis, The niels Bohr Institute, 1990
- [18] B. K. Berger, *Gen. Relativ. Gravit.*, 23, 1385, 1991
- [19] D. Hobill, D. Bernstein, D. Simkins, M. Welge, *Class. Quantum Grav.*, 8, 1155, 1991
- [20] S.E. Rugh, Chaotic Behaviour and oscillating three-volume in B_{IX} Universes, *Phys. Lett. A*, 147,353,1990
- [21] S. E. Rugh, Chaos in the Einstein equations - characterization and importance, in *Deterministic Chaos in General Relativity*, ed. by D. Hobill, A. Burd and A. Coley, Plenum New york, 1991, [*arXiv : gr - qc 9406008*]
- [22] A. Latifi, M.Musette, R. Comte, The bianchi IX (mixmaster) cosmological model is not integrable, *Phys. Rev A*, 194,83,1994
- [23] G. Contopoulos, B. Gramaticos, A. Ramani, *J. Phys. A*, 27,5357,1994
- [24] J. P. Mimoso, D. Wands, Massless fields in scalar-tensor cosmologies , *Phys. Rev. D*, 51, 477, 1994
- [25] J. P. Mimoso, D. Wands, Anisotropic scalar-tensor cosmologies, *Phys. Rev. D*, 52, 5612, 1995
- [26] A.A. Kirilov, V.N. Melnikov, Dynamics of the metric in the vicinity of a singularity in multidimensional cosmology, *Phys. Rev. D*, 52, 723,1995
- [24] N.J. Cornish, J.J. Levin, Mixmaster universe : A chaotic Farey tale, *Phys. Rev. D*, 55, 7489, 1997

- [25] M. di Bari, P. Cipriani, The(In)stability of the bianchi IX Dynamics : The geodesic deviation equation in the Finsler space, gr-cq 9807022, Jul 1998
- [26] J. D. Barrow, M. P. Dabrowski, Is there chaos in low-energy string cosmology, Phys. Rev. D, 57, 7204, 1998
- [27] M. Weaver, J. Isenberg, B. K. Berger, Mixmaster behavior in inhomogeneous cosmological spacetimes, Phys. Rev. Lett., 80, 2984,1998
- [28] A. E. Motter, P. S. Letelier, Mixmaster chaos, [arXiv : gr - qc 0011001], nov 2000
- [29] T. Damour, M. Henneaux, Chaos in Superstring cosmology, Phys. Rev. Lett., 85,920,2000
- [30] T. Damour, M. Henneaux et H. Nicolai, Cosmological Billiards, Clas. Quant. Grav., 20, R145,2003[arXiv : hep - th 0212256]
- [31] H. Ringström, The bianchi IX attractor, Ann. Inst. H.Poincaré, 2,405, 2001[arXiv : gr - cq 0006035]
- [32] V.R. Gavrilov, V.D. Ivashchuk et V.N. Melnikov, Multidimensional cosmology with multicomponent perfect fluids dans toda lattices, Abstracts of the reports at the international school seminar, p66, 20-26 june 1994
- [33] V.I. Pavlov, The mixmaster cosmological problem as a pseudoeuclidian generalized toda chain, Regular and chaotic behaviour,1, 111,1996
- [34] M. Szydłowski, M. Biesiada, Kovalevski exponents and integrability properties in class A homogeneous cosmological models, Journal of non linear mathematical physics, 9,L1,2002
- [35] L.D. Landau et E.M. Lifshitz, Théorie des champs classiques, Editions Mir Moscou, Chapitre XII, 1970, ce chapitre est présent uniquement à partir de la 3^{ème} édition ...
- [36] J.Wainwright et G.E.R. Ellis, Dynamical systems in cosmology, 1997, Cambridge University Press
- [37] J.Wainwright et L. Hsu, A dynamical systems approach to Bianchi cosmologies : orthogonal models of class A, Class. and Quant. Grav., 6, 1409, 1989
- [38] C. Ugla, Hamiltonian cosmology, Chapitre 10 de l'ouvrage [36], 1997
- [39] R.T. Jantzen, Spatially homogeneous dynamics : A unified picture, version reformartée et corrigée de Proc. Int. Sch. Phys. E. Fermi, Course LXXXVI (1982), on "Gamov Cosmology", R. Ruffini, F. Melchiorri Eds., North Holland, Amsterdam, 61-147, 1987 [arXiv : gr - cq 0102035]
- [40] C.W. Misner, Quantum Cosmology, Physical Review 186,5,1319,1969
- [41] M.P. Ryan, Qualitative cosmology : Diagramatic solutions for Bianchi Type IX Universes with expansion, Rotation and Shear. I the symetric case, Ann. Phys., 65,506,1971
- [44] L. A. Bunimovitch, Billiards and other hyperbolic systems, in Dynamical systems Ergodic theory and applications, ed. by J. Fröhlich, S.P. Novikov, D. Ruelle, Springer,
- [42] L. A. Bunimovitch, Funktsional'nyl Analiz Ego Prilozheniya, Vol. 6, N°3, p73-74, 1974
- [43] L. A. Bunimovitch, A theorem on ergodicity of two dimmensional hyperbolic billiards, Comm. Math. Phys, 130,599,1990
- [45] L. A. Bunimovitch, Ya. G. Sinai, N.I. Chernov, Statistical properties of two dimensional hyperbolic billiards, Russian Math. Survey, 46,4,47,1991
- [46] A.M. Perelomov, Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras, Vol. 1, Springer Verlag, 1990
- [M1] E. Ott, Chaos in dynamical systems, Cambridge University press, 1993
- [M2] L-S Young, Ergodic theory of chaotic dynamical systems, ?
- [M3] L. Salasnich, Instability and chaos in spatially homogeneous field theories, J. of Math. Phys., 40,4429,1999
- [M4] R. Conte, The Painlevé approach to non linear ODE, p.77-180, dans The Painlevé property : One century later, CRM series in Mathematical Physics, Editeur R. Conte, Springer Verlag, 1999
- [M5] Haruo Yoshida, Necessary condition for the existence of algebraic first integrals I : Kowalevski exponents, Celestial mechanics, 31,363, 1983
- [M6] Haruo Yoshida, Necessary condition for the existence of algebraic first integrals II : Conditions for algebraic , Celestial mechanics, 31,381, 1983
- [M7] C. Scheen, Contribution à l'étude de la dynamique de modèles cosmologiques anisotropes au voisinage de la singularité initiale, Publication de la classe des sciences de l'académie royale de Belgique, 2001
- [M8] A. Ramani, B. Grammaticos et T. Bountis, The painlevé property and singularity analysis of integrable and non-integrable systems, Physics reports, 180,3,159,1989
- [B1] L. Bianchi, Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti [On three-dimensional spaces which admit a continuous group of motions], Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze, Serie Terza, vol. 11, p.267-352, 1898

- [B2] L. Bianchi, Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finite di trasformazioni [Lectures on the theory of finite continuous transformation groups (1902-1903)], Pisa, 1918, pp.550-557 traduction en anglais : General Relativity and Gravitation, 33, 2157-2170, 2001 et General Relativity and Gravitation, 33, 2171-2253, 2001