Equation de Maxwell
ou d'Einstein :
Même combat ?

I 4 équations de Maxwell ?

1. $\mathrm{div}\, E = \rho/\varepsilon_0$ — Maxwell-Gauss
   source.
   → Thm de Gauss, loi de Coulomb.

2. $\mathrm{div}\, B = 0$ — Maxwell-Thomson
   → pas de monopoles magnétiques (source ponctuelle de champ magnétique) car pas de terme source
   → $\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\, A$

   $\varepsilon_0 = 36\pi\, 10^{-9}$ SI
   $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

3. $\vec{\mathrm{rot}}\, E = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ — Maxwell-Faraday.
   → la variation du champ magnétique crée un champ électrique.

4. Maxwell - Ampère $\vec{\mathrm{rot}}\, B = \mu_0 \vec{j} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$; $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$.
   → un courant électrique ou une variation de champ électrique créent un champ magnétique.

→ Conséquences des équations de Maxwell.

* A - Conservation de la charge : div 4

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\, B) = \mu_0\, \mathrm{div}\, \vec{j} + \frac{1}{c^2}\, \mathrm{div}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \quad \left[\mathrm{div}, \frac{\partial}{\partial t}\right] = 0$$

$$0 = \mu_0\, \mathrm{div}\, \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\, \vec{E})$$

$$0 = \mu_0\, \mathrm{div}\, \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) \quad 1$$

$$\rightarrow \boxed{\mathrm{div}\, \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

* B - Equation de propagation : $\vec{\mathrm{rot}}$ 3

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, E) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, E) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathrm{rot}}\, B)$$

$$= -\left[\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\right]$$

Truc ! (rot(rot) = grad(div) - $\vec{\Delta}$

en regroupant,

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mathrm{grad}\,(\rho/\varepsilon_0) + \mu_0 \frac{\partial\vec{j}}{\partial t}}$$

de même en prenant le rot④ il vient.

$$\mathrm{rot}\,(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = \mu_0\,\mathrm{rot}\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\vec{B}) - \Delta\vec{B} = \mu_0\,\mathrm{rot}\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0\,\mathrm{rot}\,\vec{j}}$$

dans le vide $\left(\begin{matrix}\rho = 0\\ \vec{j} = 0\end{matrix}\right)$ ou dans un isolant (pareil!).

$$\begin{cases}\Delta\vec{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t^2} = 0\\[2ex] \Delta\vec{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t^2} = 0\end{cases}$$

(d'Alembert). $B, E \propto e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ avec $\omega = k/c$

dans un conducteur ohmique $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. $\rightarrow$ amortissement.

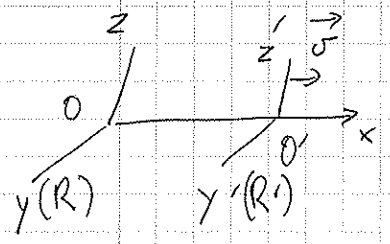
Incompréhensible d'un point de vue classique !

car $v + c = c$ (Exp. de Michelson-Morley)

II. Relativité restreinte : Les équations de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens

Dans un référentiel gal, la "vitesse de la lumière" est c — elle est donc la même dans tous les référentiels galiléens.

Transf. de galillée



$$\begin{cases} t = t' \\ x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \xrightarrow{\text{Hyp.}} \begin{cases} t' = at + bx \\ x' = dt + ex \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

linéarité et invariance y, z.

(R') mobile à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = Id \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) Le point $O\begin{pmatrix} x=0 \\ ct \end{pmatrix}$ a une vitesse $-v$ dans R' $\rightarrow x' = -vt'$

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ ct \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x' = Bct & \rightarrow x' = \frac{B}{E} ct' \\ ct' = Ect & \rightarrow t = t'/E \end{cases}$$

et comme on a vu que $x' = -vt' \rightarrow \boxed{\frac{B}{E} = -\frac{v}{c} = -\beta}$

(2) Onde sphérique émise en $t = t' = 0$ au moment où les 2 réf se croisent

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$ { c est le même dans les 2 référentiels.

$$\Rightarrow c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2$$

$$\Rightarrow (Dx + Ect)^2 - (Ax + Bct)^2 = c^2t^2 - x^2$$

$$\Rightarrow (D^2 - A^2)x^2 + (E^2 - B^2)c^2t^2 + 2cxt(DE - AB) = c^2t^2 - x^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} A^2 - D^2 = 1 & \rightarrow \exists\, \psi \in \mathbb{R};\ A = \operatorname{ch}\psi,\ D = \operatorname{sh}\psi \\ E^2 - B^2 = 1 & \rightarrow \exists\, \psi' \in \mathbb{R};\ E = \operatorname{ch}\psi',\ B = \operatorname{sh}\psi' \\ DE - AB = 0 & \rightarrow \operatorname{ch}\psi' \operatorname{sh}\psi - \operatorname{ch}\psi \operatorname{sh}\psi' = 0 \\ & \Rightarrow \operatorname{sh}(\psi - \psi') = 0 \Rightarrow \psi = \psi'. \end{cases}$$

$$\frac{B}{E} = -\beta \Rightarrow \operatorname{th}\psi = -\beta \quad ; \quad \boxed{\psi = -\operatorname{argth}\beta}$$

$$\begin{cases} A = E = \operatorname{ch}(-\operatorname{argth}\beta) = +1/\sqrt{1-\beta^2} = \gamma \\ B = D = \operatorname{sh}(-\operatorname{argth}\beta) = -\beta/\sqrt{1-\beta^2} = -\beta\gamma \end{cases}$$

Transformation de Lorentz spéciale

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \quad \text{TLS}$$

selon Ox

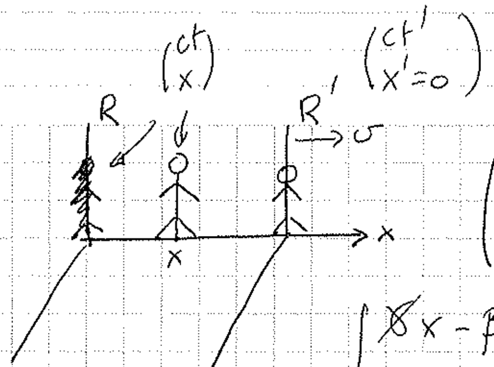
généralisation : compositions...

$$\{\text{TLS} + \text{isométrie}(x, y, z) + \text{symétrie}(t \to -t)\} = SO(3,1)$$

groupe de Lorentz.

ensemble des transf. qui préservent $\ell^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

Jumeaux



$$\begin{pmatrix}0\\ ct'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma & -\beta\gamma\\ -\beta\gamma & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ ct\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\cancel{\gamma}x - \beta\cancel{\gamma}ct = 0 \to x = \beta ct\\ ct' = -\beta\gamma x + \gamma ct \Rightarrow \cancel{c}t' = -\beta^2\gamma\cancel{c}t + \cancel{c}t\gamma\end{cases}$$

$$\to t' = \gamma t(1-\beta^2) = t/\gamma$$

$$dt' = d\tau = dt/\gamma .$$

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\vec r^{\,2} = c^2dt^2(1-\beta^2) = \gamma^2c^2dt^2 = c^2d\tau^2$$

$\to \boxed{ds = c\,d\tau}$ $d\tau$ 4 scalaire.

4 vecteurs

$$x^\mu = \begin{pmatrix}ct\\ x\\ y\\ z\end{pmatrix} \; ; \; dx^\mu = \begin{pmatrix}c\,dt\\ d\vec r\end{pmatrix} \; ; \; ds^2 = d\vec{x}.d\vec{x}$$

$x^0 = ct$

$x^1 = x$

$x^2 = y$

$x^3 = z$

$$dx_\mu = (ct \;\; d\vec r) \qquad ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} dx^\mu . dx_\mu$$

que l'on peut écrire $ds^2 = dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu}$; $\boxed{x^\mu = \eta^{\mu\nu}x_\nu}$

si $\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & \text{si } \mu=\nu=0\\ -1 & \text{si } \mu=\nu=1,2,3\\ 0 & \text{si non.}\end{bmatrix}$

propriété fond. des 4-vecteurs

* 4 vecteur (position) : $x'^\mu = \mathcal{L}^\mu{}_\nu\, x^\nu$

$$\mathcal{L}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix}\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0\\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad (\text{TLS})$$

$$\mathcal{L}_{\mu\nu} = \mathcal{L}^\alpha{}_\nu\, \eta_{\alpha\mu}$$

etc...

* 4- vitesse $u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\dfrac{c\,dt}{d\tau}, \dfrac{d\vec r}{d\tau}\right)^T = \left(\gamma c, \gamma\dfrac{d\vec r}{dt}\right)^T = \begin{pmatrix}\gamma c\\ \gamma\vec v\\ \vdots\end{pmatrix}$

$$u_\mu = (\gamma c, -\gamma\vec v) \; ; \; u^2 = u^\mu u_\mu = \gamma^2c^2 - \gamma^2v^2$$
$$= \gamma^2c^2(1-\beta^2)$$
$$= c^2 = cte$$

$$\frac{du^2}{d\tau} = 0 \to u^\mu\frac{du_\mu}{d\tau} + u_\mu\frac{du^\mu}{d\tau} = 0$$

* 4 - accélération $\Gamma^\mu = \dfrac{du^\mu}{d\tau}$; $u^\mu\Gamma_\mu + u_\mu\Gamma^\mu = 0$

$$u_\mu\Gamma^\mu = u^\alpha\eta_{\alpha\mu}\Gamma_\beta\eta^{\beta\mu} = u^\alpha\Gamma_\beta\overbrace{\eta_{\alpha\mu}\eta^{\beta\mu}}^{\delta_\alpha^\beta} = u^\alpha\Gamma_\alpha$$

* 4-courant   Conservation de la charge $\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x^1}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x^2}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x^3}\vec{j} + \frac{\partial \rho c}{\partial x^0} = 0$$

on pose $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0$ avec $J^\mu = \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}$

mais on sait que $\vec{j} = \rho\vec{v}$ donc $J^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{dt}$. 4 vecteur ?

Q = Charge contenue dans l'élément de volume dV est un 4-scalaire...

$$Q = \rho\, dV = \rho' dV'$$

dx^μ est un 4-vecteur donc $\rho\, dV dx^\mu$ est aussi un 4-vecteur.

$$\Rightarrow \rho\, dt\, dV \frac{dx^\mu}{dt} = \underbrace{dt\, dV}_{\frac{ds}{c}} J^\mu \text{ 4 vecteur} \rightarrow J^\mu \text{ 4 vecteur.}$$

IV Equations du mvt en RR : "Les équati- ... sont les m̂ dans tous les ref galiléens" (covariance)

Principe général : $\mathcal{L}$ = 4 scalaire $\rightarrow S = \int \mathcal{L} \rightarrow \delta S = 0$
$\rightarrow$ équation covariante

Le + simple $S = \underbrace{\int \alpha\, ds}_{\text{particule libre}} + \beta \int A_\mu dx^\mu$
(A_μ : 4 vect. à l'origine d'une force.)

$S_{libre} = \int \alpha\, ds$; ~~$\delta S_\ell = \int \alpha\, \delta ds$~~ ; $ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$.

$$= \int \alpha c\, dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{si } v^2 \ll c^2) \simeq \int \alpha c\, dt \left(1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\simeq \underbrace{\int \alpha c\, dt}_{\text{cste}} - \int \frac{1}{2} \alpha \frac{v^2}{c} dt \simeq \text{cste} - \int \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c} v^2 dt$$

si $\alpha = -mc$ $S_{libre} \rightarrow \int \frac{1}{2} m v^2 dt$ si $v \ll c$

Premier groupe

$$S = \int_1^2 -mc\, ds + k \int A_\mu dx^\mu.$$

Variation $\delta S = 0$ $\delta x^\mu(1) = \delta x^\mu(2) = 0$

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = k F_{\mu\nu} u^\nu \; ; \; F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$k = q$ (charge) $\rightarrow$ Force de Lorentz   PFD rel. restreinte.

On sépare partie spatiale et temporelle de $F_{\mu\nu}$ ... on pose $A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)^T$

$$\ldots \quad F_{0i} = \frac{E_i}{c} \qquad \text{avec } \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ et } \vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}.$$

$$F_{ij} = (-1)^{i+j}\underbrace{(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})}_{\vec{B}}.\vec{e}_k$$

Par définition $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, c'est un 4-rot $\Rightarrow$ sa 4div est nulle ..

$$\boxed{\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0} \qquad 4\times4\times4 \text{ équations}$$

dont beaucoup sont nulles ou équivalentes ; seules celles telles que $\rho\neq\mu\neq\nu$ dans un ordre donné sont différentes : il en reste donc 4 distinctes.

- $\rho=1, \mu=2, \nu=3$: $\boxed{\text{div}\,\vec{B} = 0}$
- $\rho=0, \mu=1, \nu=2$; $\rho=0, \mu=1, \nu=3$; $\rho=0; \mu=2; \nu=3$

$$\left.\begin{array}{l} (\text{rot}\,\vec{E}).\vec{e}_3 = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.\vec{e}_3 \\ (\quad).\vec{e}_2 = \ldots\ \vec{e}_2 \\ (\quad).\vec{e}_1 = \ldots\ \vec{e}_1 \end{array}\right\} \boxed{\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

Second Groupe

plusieurs charges $q_{\alpha=1,\ldots}$ $\qquad S_i = -\sum_\alpha q_\alpha \int A_\mu dx^\mu$

$$q_\alpha = \int d^3r\,\rho \qquad \text{avec } \rho = \sum_\alpha q_\alpha\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_\alpha).$$

$$\rightarrow\quad S_i = -\int d^3r\,\rho\,A_\mu \frac{dx^\mu}{dt}.dt$$

$$\text{et comme } J^\mu = \rho\frac{dx^\mu}{dt} \ldots\!> S_i = -\int A_\mu J^\mu d^3r\,dt$$

Pour l'action totale il faut un 4-scalaire en guise de lagrangien et un terme qui décrive l'interaction du champ avec lui-même, or le champ est décrit par $F_{\mu\nu}$ ...

$$\boxed{S = \underbrace{-mc\int_1^2 ds}_{\text{particule libre}} \underbrace{-\int_1^2 A_\mu J^\mu d^3r\,dt}_{\text{interaction champ-particule}} + k\underbrace{\int_1^2 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,d^3r\,dt}_{\text{champ libre}}}$$

Variation : mouvement fixé ($\delta x^\mu = 0$) on cherche le chemin correspondant au minimum du champ.

$$\delta S = 0 \quad \text{avec } \delta A_\mu(1) = \delta A_\mu(2) = 0.$$

$$\boxed{J^\mu = 4k\,\partial_\nu F^{\mu\nu}}$$

en identifiant on trouve $4k = -\varepsilon_0 c^2$

Comp. temporelle : $\nu = 0$, $\left[\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\rho c^2}{4k} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right]$

Comp. spatiale :
$$\left.\begin{array}{lll} \nu = 1 & (\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B})\cdot\vec{e_1} = (\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\cdot\vec{e_1} \\ \nu = 2 & (\quad)\cdot\vec{e_2} = (\quad)\cdot\vec{e_2} \\ \nu = 3 & (\quad)\cdot\vec{e_3} = (\quad)\cdot\vec{e_3} \end{array}\right\} \left[\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$$

Conclusion : en fait, il n'y a que 2 équations de Maxwell

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 & (1) \\ \mu_0 J^\mu = \partial_\nu F^{\nu\mu} = \partial_\nu (\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu) & (2) \end{array}\right\} \text{Equations de Maxwell.}$$

(1) est une propriété "géométrique" de $F_{\mu\nu}$ ($\operatorname{div}(\mathrm{rot}) = 0$) ...

(2) est la seule "vraie" propriété physique : champ ⟷ mouvement.

c'est la généralisation dynamique de l'équation de Poisson électrostatique

$$\partial_j \partial^j V = -\rho/\varepsilon_0 \qquad V : \text{potentiel électrostatique.}$$

(classique) Statique		Dynamique (Relativité)
$V, \vec{A}$	⟶	A_μ
$\rho, \vec{j}$	⟶	J_μ

: $J_\mu = \Theta(A_\mu)$

avec Θ : opérateur différentiel du second ordre

Einstein : la gravitation c'est pareil !!!

Classique : Equation de Poisson $\underbrace{\overbrace{\partial_j \partial^j}^{\Delta} \psi}_{\text{potentiel gravitationnel}} = 4\pi G \rho$ ← densité volumique de masse.

Classique	Dynamique (Rel)
ψ ⟶	A
ρ ⟶	B

$B = \Theta(A)$ avec Θ opérateur différentiel d'ordre 2.

$\boxed{\text{que sont les grandeurs A et B ?}}$

Einstein va mettre 5 ans pour trouver

la (bonne) réponse ...!

avec l'aide des mathématiciens...

Fil Noir 2011 - JPerez

V Relativité Générale.

Principe d'équivalence $\vec{a} = \vec{g}$, mais ce n'est que local !

A grande échelle la gravitation rend impossible le fait que l'on puisse trouver un réseau de référentiels galiléens "équivalents".

(PRG) $\rightarrow$ Principe de relativité générale : les équations de la physique sont les m̂ dans tous les référentiels (pas seulement les galiléens) !

Réf galiléen : Réf inertiel local système de coordonnées attaché ξ^α.

Réf quelconque : système de coordonnées attaché x^μ : $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu)$.

- Equation du mouvement à accélération nulle (géodésique)

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow \cancel{\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \cancel{\frac{dx^\mu}{d\tau}}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} = 0\right] \times \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} + \underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu}}_{\delta^\lambda_\nu}\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \underbrace{\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}}_{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} = 0$$ Equation des géodésiques.

$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \leftarrow$ Symbole de connection affine.
qui apparaît dès lors que l'on veut écrire des équations dans un référentiel quelconque ! (PRG)

- Métrique : $ds^2 = \overset{\text{dans inertiel local}}{\eta_{\alpha\beta}}\, d\xi^\alpha d\xi^\beta = \underbrace{\eta_{\alpha\beta}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}}_{g_{\mu\nu}} dx^\mu dx^\nu$

$\rightarrow g_{\mu\nu}$. dans un système de coordonnées quelconque

$$\left.\begin{array}{l}\partial_\rho g_{\mu\nu} = \cdots \\ \partial_\mu g_{\rho\nu} = \cdots \\ \partial_\nu g_{\mu\rho} = \cdots\end{array}\right\} \quad \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\rho,\nu} + g_{\nu\rho,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}\right) g^{\rho\lambda}$$

$\boxed{\text{Symbole de connection affine} \propto \text{dérivées de la métrique (1ère)}}$

- Symbole de connection affine : pas un tenseur ! $A^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$; $A_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}$

$$\Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma} = A^{\alpha}{}_{\sigma} A_{\beta}{}^{\rho} A_{\gamma}{}^{\lambda} \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda} + \text{"Terme non covariant"}$$ ... facile à vérifier !

- Dérivée d'un vecteur : pas un tenseur !

X^{α} : tenseur ; ∂_{μ} : tenseur : $X'^{\alpha} = A^{\alpha}{}_{\rho} X^{\rho}$; $\underbrace{\partial'_{\mu} = A_{\mu}{}^{\nu} \partial_{\nu}}$

$\partial_{\mu} X^{\alpha}$ tenseur ? $\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}$

si oui $\partial_{\mu} X^{\alpha} = T_{\mu}{}^{\alpha}$ et $T'_{\mu}{}^{\alpha} = A_{\mu}{}^{\rho} A^{\alpha}{}_{\sigma} T_{\rho}{}^{\sigma}$ tout simplement...

vérifions-le $T'_{\mu}{}^{\alpha} = \partial'_{\mu} X'^{\alpha} = A_{\mu}{}^{\nu} \partial_{\nu} (A^{\alpha}{}_{\rho} X^{\rho})$

$$= \underbrace{A_{\mu}{}^{\nu} A^{\alpha}{}_{\rho}\, \partial_{\nu} X^{\rho}}_{\text{Terme "covariant"}} + \underbrace{A_{\mu}{}^{\nu} X^{\rho} \partial_{\nu} A^{\alpha}{}_{\rho}}_{\text{Terme non covariant...}}$$

idée : mélanger ces deux problèmes pour créer une dérivée covariante !!!
c'est soit du calcul, soit de la géométrie...

<u>Déf</u> : $D_{\alpha} X^{\rho} = \partial_{\alpha} X^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} X^{\beta}$

on en déduit que $D_{\alpha} X_{\rho} = \partial_{\alpha} X_{\rho} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\rho} X_{\beta}$

<u>Dérivée covariante</u>. $D_{\alpha} = ;\alpha$

→ Si on veut écrire des choses de la même façon dans tous les référentiels (tensoriellement) il faut utiliser la dérivée covariante...

→ "Problème" : le thm de Schwarz ne s'applique pas pour la dérivée covariante.

$$0 \neq [D_{\alpha}, D_{\beta}] A_{\mu} = D_{\alpha}(D_{\beta} A_{\mu}) - D_{\beta}(D_{\alpha} A_{\mu})$$
$$= R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\beta} A_{\lambda}$$

Courbure de Riemann-Christoffel.
(dérivée "seconde" covariante)

→ Remarques fondamentales

- $D_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0$ (Théorie sans torsion)
- $R_{\alpha\beta[\mu\nu;\rho]} = 0$ Identité de Bianchi
propriété géométrique.

→ <u>Conséquence : Equations d'Einstein</u>

Tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta\mu\nu} g^{\alpha\mu} = R_{\beta\nu}$

Scalaire de Courbure : $R_{\beta\nu} g^{\beta\nu} = R$

- Tenseur d'Einstein.

$$\left(R_{\alpha\beta\mu\nu;\rho} + R_{\alpha\beta\nu\rho;\mu} + R_{\alpha\beta\rho\mu;\nu} = 0 \right) \times g^{\beta\nu}$$

$$\Rightarrow \left(R_{\alpha\mu;\rho} + (-) R_{\alpha\rho;\mu} + (-) R^{\nu}{}_{\alpha\rho\mu;\nu} = 0 \right) \times g^{\alpha\mu}$$

$$\Rightarrow \quad R_{;\rho} + (-) R^{\mu}{}_{\rho;\mu} + (-) R^{\nu}{}_{\rho;\nu} = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_{;\rho} - 2 R^{\mu}{}_{\rho;\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(R \delta^{\mu}_{\rho} - 2 R^{\mu}{}_{\rho} \right)_{;\mu} = 0$$

$$\left(\left(-\frac{1}{2} R g^{\mu\alpha} g_{\alpha\rho} + R^{\mu}{}_{\rho} \right)_{;\mu} = 0 \right) \times g_{\mu\beta}$$

$$\left(-\frac{1}{2} R \underbrace{g_{\mu\beta} g^{\mu\alpha}}_{\delta^{\alpha}_{\beta}} g_{\alpha\rho} + \underbrace{g_{\mu\beta} R^{\mu}{}_{\rho}}_{R_{\beta\rho}} \right)_{;\mu} = 0$$

$$\rightarrow \quad \left(R_{\beta\rho} - \frac{1}{2} g_{\beta\rho} R \right)_{;\mu} = 0$$

$$\boxed{G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad \text{Tenseur d'Einstein}}$$

$G_{\mu\nu}$: opérateur différentiel d'ordre 2 appliqué à la métrique.

- Conservation de l'énergie impulsion : $D_\rho T_{\mu\nu} = 0$

tenseur énergie impulsion.

Equations d'Einstein $G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$; $\chi = \frac{8\pi G}{c^4}$.

$(+\Lambda g_{\mu\nu})$ terme cosmologique.

→ Autre formulation

$G_{\mu\nu} \in \ker(D_\rho)$; $T_{\mu\nu} \in \ker(D_\rho)$; $g_{\mu\nu} \in \ker(D_\rho)$

le noyau est un espace vectoriel . . .

→ Autre formulation

$$S = \int \mathcal{L}_{courb} + \int \mathcal{L}_{mat} = S_{courb} + S_{mat}$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ G_{\mu\nu}}}{\delta S_{courb}} + \underset{\substack{\uparrow \\ -\chi T_{\mu\nu}}}{\delta S_{mat}} = 0$$

Où l'on retrouve les équations de Maxwell...

- Identité de Bianchi : $\left(R^{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R^{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R^{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0\right) \times g_{\alpha\mu}$

$$\Rightarrow \quad R^{\beta\nu;\lambda} - R^{\beta\lambda;\nu} + R^{\alpha\beta\nu\lambda}{}_{;\alpha} = 0$$

$$'' \quad + R^{\nu\lambda\alpha\beta}{}_{;\alpha} = 0$$

$$'' \quad +(-) R^{\nu\lambda\beta\alpha}{}_{;\alpha} = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{R^{\nu\lambda\beta\alpha}{}_{;\alpha} = R^{\beta\nu;\lambda} - R^{\beta\lambda;\nu}} \quad (1)$$

- Equation d'Einstein

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \chi T^{\mu\nu}\right) \times g_{\mu\nu}$$

$$R - \frac{1}{2} \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{4 = 1+1+1+1} R = \chi T$$

$4 = 1+1+1+1$: $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = tr(g)$: invariant, en se plaçant dans l'inertiel local le calcul est évident...

$$\rightarrow \quad R = -\chi T$$

$$\text{d'où} \quad R^{\mu\nu} = \chi\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T\right)$$

ainsi

$$R^{\beta\nu;\lambda} = \chi\left(T^{\beta\nu;\lambda} - \frac{1}{2} g^{\beta\nu} T^{;\lambda}\right)$$

$$R^{\beta\lambda;\nu} = \chi\left(T^{\beta\lambda;\nu} - \frac{1}{2} g^{\beta\lambda} T^{;\nu}\right)$$

$$(1) \rightarrow \quad R^{\nu\lambda\beta\alpha}{}_{;\alpha} = \chi \underbrace{\left[T^{\beta\nu;\lambda} - T^{\beta\lambda;\nu} - \frac{1}{2}\left(g^{\beta\nu} T^{;\lambda} - g^{\beta\lambda} T^{;\nu}\right)\right]}_{H^{\nu\lambda\beta}}$$

et l'on écrit

$$\begin{cases} R^{\nu\lambda\beta\alpha}{}_{;\alpha} = \chi H^{\nu\lambda\beta} & \text{(Eq. d'Einstein)} \\ R^{\alpha\beta[\mu\nu;\rho]} = 0 & \text{(Id. de Bianchi)} \end{cases} \quad \text{non linéaires}$$

alors que les équations de Maxwell s'écrivent

$$\begin{cases} F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \mu_0 J^\mu & \text{(Eq. de Maxwell)} \\ F^{[\mu\nu,\rho]} = 0 & \text{(Id. du rotationnel)} \end{cases} \quad \text{Linéaires}$$

conséquences (entre autres...)

$H^{\alpha\beta\gamma}$: "courant" gravitationnel, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ → dans une certaine jauge ($\partial_\mu A^\mu = 0$)

$\underbrace{\partial_\nu \partial^\nu}_{\square \text{ d'alembertien}} A^\mu = \mu_0 J^\mu$ équation de propagation pour $A^\mu \sim \vec{A}$ et $\vec{\sigma}$

ici ψ (pot grav) → $g_{\mu\nu}$ ← équation de propagation

ONDES GRAVITATIONNELLES !